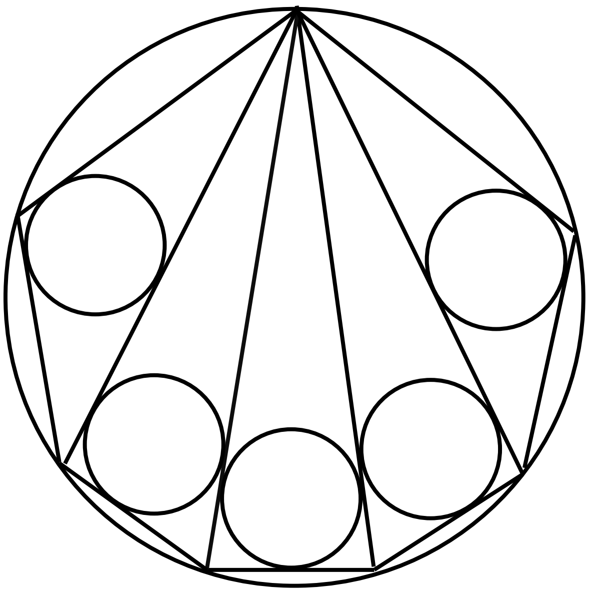
İxtiyar İsmayılov

Həndəsə məntiqi düşünmədə

Planimetriyaya aid tərif və anlayışlar
Teoremlər , xassələr və onların isbatı
Çalışma nümunələri və çalışmalar



"Riyaziyyat və intellekt" seriyasından

Dördüncü pillə

BAKI - 2008

**İsbat - məntiqi düşünməyi
tənzimləyən ən yaxşı
vasitədir.**

Rəyçilər:

Arif Əhmədov - Bakı PKİ institutunun riyaziyyat tədris-metodika kabinetinin müdiri

Rövşanə Qəmbərova - Bakı PKİ institutunun riyaziyyat tədris-metodika kabinetinin metodisti

Təlim vəsaitinin bu elektron və çap variantı qəbul imtahanlarına hazırlaşanlar üçün nəzərdə tutulsa da bu vəsaitdən riyaziyyat müəllimləri 7-ci sinifdən başlayaraq öz dərslərində və yaxud hazırlıq kurslarında effektiv və intensiv şəkildə istifadə edə bilərlər.

Təlim kursu kimi ixtisasartırma kurslarında dərs modeli kimi də istifadə oluna bilər.

Sürətli inkişaf proqramına uyğun yazılmış və öz orjinallığı ilə fərqlənən bu vəsait biliyini müstəqil olaraq artırmaq istəyənlər üçün də faydalı ola bilər.

Vəsaitdəki çalışmaların cavabları ayrıca vərəqdə təqdim edilir. Bütün çalışmaların izahlı həlli isə vəsaitin elektron variantına daxil edilmişdir.

Şagirdlərin təfəkkür fəaliyyətinin inkişafı , izah və isbatetmə mədəniyyətinin formalaşdırılması məqsədi ilə hazırlanmış bu vəsait VII - IX sinif həndəsə proqramını əhatə edir.Bəzi maraqlı əlavələrlə yanaşı vəsaitdə üçbucağa məxsus anlayışlar dilində triqonometrik funksiyaların şərhinə də kifayət qədər yer verilmişdir.

ISBN 978-9952-24-040-5

PROQRAM SƏHİFƏSİ

Nəyi öyrənməli?

1. Nöqtə,düz xətt,müstəvi,fəza ilə ilkin tanışlıq
2. Parça və şüa , parçanın proyeksiyası
3. Bucaq və bucaq cütləri
4. Üçbucaqlar (bucaq üçlükləri)
5. Çevrə və dairə
6.İxtiyari üçbucaqda triqonometriya
7. Dördbucaqlılar
8. Çoxbucaqlılar
9.Vektorlar
10.Müstəvidə koordinatlar metodu

Necə öyrənməli?

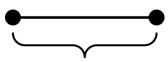
Fiqurun:
1.Tərifi
2. Elementləri
3. Növləri
4.Öz xassələri
5. Növlərinin xassələri
6. Elementlərinin xassələri
7.Çalışma nümunələri
8. Çalışmalar

M ö v z u l a r ı n ö y r ə n i l m ə a r d ı c ı l l ı ğ ı

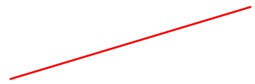
Hər səhifədə bir paraqraf yerləşdirilmişdir

§1. Düz xətt

Nöqtə

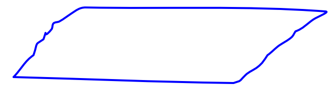


Iki nöqtə arasındakı məsafə

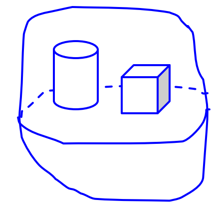


Düz xətt (d/x)

Hər iki tərəfə sonsuz davam edir.



Müstəvi



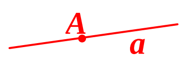
Fəza

Hər tərəfə sonsuz davam edir.

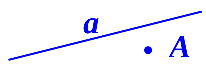
İki nöqtə arasındakı məsafə müsbət ədədlə ölçülür. Praktikada kiçik məsafələr əsasən **xətkeş** (və ya bölgülü **lentlə**) ölçülür.

İki nöqtə üst-üstə düşə bilər,bu halda iki nöqtə arasındakı **məsafə sıfır qəbul** edilir.

Qeyd edək ki, üst-üstə düşən nöqtələr **bir nöqtə** kimi başa düşülür.



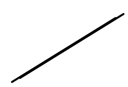
A nöqtəsi *a* d/x üzərindədir: A $\in$ *a* ,



A nöqtəsi *a* d/x-nə aid deyil: A $\notin$ *a* .

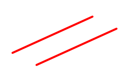
Tərif: *Üst-üstə düşən düz xətlər* ***eyni****, üst-üstə düşməyən düz xətlər isə* ***müxtəlif*** *düz xətlər adlanır.*

Eyni d/x-lər bir d/x kimi qəbul edilir.

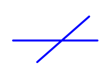


Müxtəlif d/x-lər iki cür olur**: kəsişən, kəsişməyən**

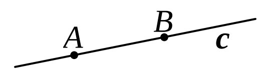
Kəsişməyən d/x-lər paralel düz xətlər adlanır.



Kəsişən d/x-lərin yalnız bir ortaq nöqtəsi var.



Nöqtə latın əlifbasının **böyük** hərfi,düz xətt (d/x) isə **kiçik** hərfi və ya iki **böyük hərfi** ilə işarə olunur (məs. AB və ya *c* düz xətti).



A , B $\in$ ***c***

Tərif: ***Yerdəyişmə zamanı d/x özünə paralel d/x-ə keçirsə, belə yerdəyişməyə özünəparalel yerdəyişmə deyilir.***

Aydındır ki, paralel d/x-lərdən biri digərindən ***özünəparalel yerdəyişmə*** ilə alına bilər və tərsinə, özünəparalel yerdəyişmə ilə paralel d/x-lər **bir (eyni) d/x-ə** çevrilə bilər.

a və *b* düz xətlərinin **paralel** olması $a \| b$ kimi işarə olunur.

a və *b* düz xətlərinin A nöqtəsində **kəsişməsi** simvlik olaraq $a \cap b$ =A kimi yazılır.

Düz xətt aksiomları

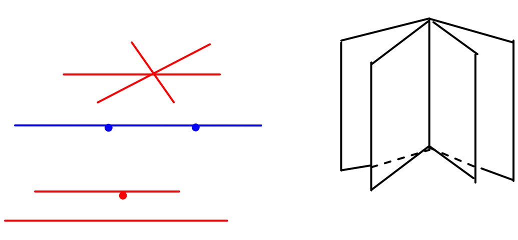
1.*Bir nöqtədən sonsuz sayda d/x keçirmək olar;*

2.*İki müxtəlif nöqtədən yalnız bir d/x keçirmək olar;*

3.*Bir düz xətdən sonsuz sayda müstəvi keçirmək olar;*

4.*Düz xətt xaricindəki nöqtədən bu d/x-ə yalnız bir paralel d/x keçirmək olar;*

5.*D/x üzərindəki üç nöqtənin biri digər ikisinin arasında yerləşir.*



Aşağıdakı mülahizələr ***eyni məna*** *daşıyır:*

a) *A nöqtəsi a d/x üzərindədir;*

b) *a d/x A nöqtəsindən keçir;*

c) *A nöqtəsi a d/x-nə aiddir;*

d) A $\in$ *a* **:** “A daxildir a”.

Qeyd. ***Bütün nöqtələri bir müstəvi üzərində yerləşən fiqur müstəvi fiquru adlanır.***

Planimetriya - həndəsənin müstəvi fiqurları və onların xassələrini öyrənən hissəsidir.

§2. Düz xəttin hissələri

Tərif**:** ***Düz xəttin iki nöqtəsi və bu nöqtələr arasındakı nöqtələr çoxluğuna parça deyilir.***

***Həmin iki nöqtə isə parçanın uc nöqtələridir*.**

Tərif: ***Düz xəttin bir nöqtəsi və bu nöqtədən eyni tərəfdə yerləşən nöqtələr çoxluğuna şüa deyilir.***

Həmin bir nöqtə şüanın ***başlanğıcı*** *adlanır.*

Şüa yalnız bir tərəfdən məhduddur.

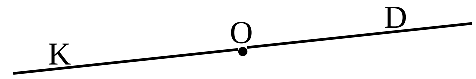
Parça hər iki tərəfdən məhduddur.

AB parçasının uzunluğu dedikdə, A və B nöqtələri arasındakı məsafə başa düşülür.

Ucları üst-üstə düşən parçanın uzunluğu 0 - dır.

Uzunluqları bərabər olan parçalar **bərabər parçalar** adlanır.

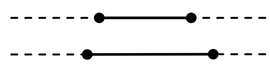
CN və CM eyni şüalardır

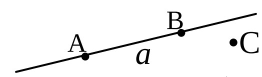


OK və OD əks şüalardır

Tərif**:** ***Parçaların (şüaların)yerləşdiyi düz xətlər paraleldirsə, belə parçalar(şüalar) paralel parçalar (şüalar) adlanır.***

Düz xətt və **parçanın** paralelliyinə də eyni qayda ilə tərif verilir.



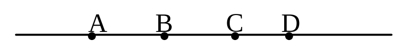


a - AB parçasının (şüasının) yerləşdiyi d/x-dir.

$A, B \in a$; $C \notin a$.

Çalışma nümunələri

1) *Şəkildə neçə a) parça ; b) şüa vardır?*



Həlli. a) AB,AC,AD,BC,BD,CD **-** cəmi **6 parça;**

b) *hər nöqtəyə iki şüa uyğun olduğu üçün cəmi* $4 \cdot 2 = 8$ ***şüa*** *vardır.*

2) *AB = 4 sm, BC = 3 sm, CD = 2 sm olduğunu bilərək,kənardakı parçaların orta nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.*

Həlli.AB**:**2 = 2, CD**:**2 = 1.**Cavab:** 2 + 3 +1 = 6 (sm).

Ç a l ı ş m a l a r

1. Hansı mülahizələr doğrudur?

1. İki nöqtədən yalnız bir d/x keçir
2. İki nöqtə yalnız bir d/x üzərindədir
3. İki nöqtə bir d/x üzərində ola bilər
4. İki nöqtə iki d/x üzərində ola bilər
5. İki nöqtə üç d/x üzərində ola bimәz
A)1,2,3 ; B)1,3,4 ; C)1,2,5; D)1,3,5; E)3,4,5

2. Hansı mülahizələr yanlışdır?

1. Bir nöqtədən sonsuz sayda d/x keçir
2.Üç nöqtədən bir d/x keçə bilər
3.İki nöqtə üç d/x üzərində ola bilməz
4. Üç nöqtə iki d/x üzərində ola bilər
5. Bir nöqtə üç d/x üzərində ola bilməz-
A)2,3 ; B)3,4 ; C)2,5; D)3,5; E)3,4,5

3. Mülahizələrdən neçəsi yanlışdır?

1. D/x hər iki tərəfdən məhduddur
2. Şüa bir tərəfdən məhduddur
3. Bir d/x-dən beş müstəvi keçirmək olmaz
4.Müstəvi yalnız bir tərəfdən məhduddur
5.Şüa üzərində verilmiş uzunluqda sonsuz sayda parça qurmaq olar
A)1 ; B)2 ; C)3; D)4; E)5

4. Mülahizələrdən neçəsi doğrudur?

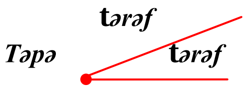
1. D/x hər iki tərəfdən məhduddur
2. Şüa bir tərəfdən məhduddur
3. Bir d/x-dən beş müstəvi keçirmək olmaz
4.Müstəvi yalnız bir tərəfdən məhduddur
5.Şüa üzərində verilmiş uzunluqda sonsuz sayda parça qurmaq olar
A)1 ; B)2 ; C)3; D)4; E)5

5. *Düz xətt üzərində A,B,C nöqtələri qeyd edilmişdir.Bu d/x üzərində neçə parça və neçə şüa vardır?*
A)3;6 B)2;4 C)3;5 D)4;6 E)3;3

6. *Düz xətt üzərində A,B,C,D nöqtələri qeyd edilmişdir.Bu d/x üzərində eyni şüalar hansılardır?*
A) AB və BC;B) AB və CD; C) AB və AC; D)BA vəAB; E) AD və BD

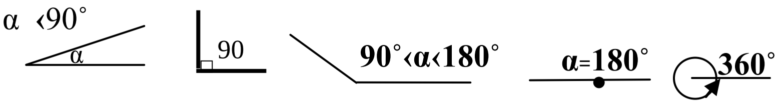
7. *Düz xətt üzərində A,B,C, nöqtələri qeyd edilmişdir.Bu d/x üzərində neçə cüt əks şüa vardır?*
A)6 ; B)4 ; C)9; D)3; E)5

§3. Bucaq

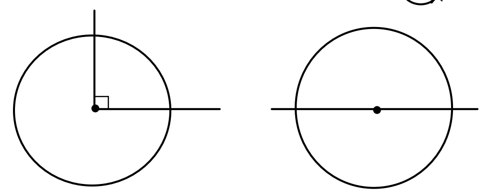


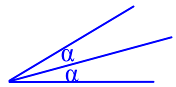
Tərif: Bir nöqtədən çıxan iki şüanın əmələ gətirdiyi fiqura bucaq deyilir.

Növləri: iti , düz , kor , açıq bucaq,tam bucaq.



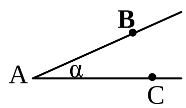
Elementləri: *təpə,iki tərəf,tənbölən*





Tərif: Təpədən çıxıb bucağı yarıya bölən şüaya tənbölən deyilir.

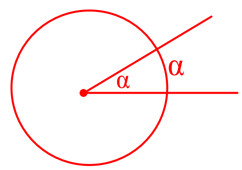
Bucaq ∠A və ya ∠BAC kimi işarə olunur(şəkildə ∠A = α).



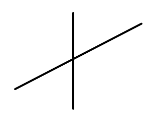
Çevrənin dərəcə ölçüsü 360º qəbul edilir.Ona görə də düz bucaq 90º, açıq bucaq isə 180 º-dir. Digər bucaqların dərəcə ölçüləri transportirlə ölçülə bilər.

☺ ***Bir nöqtədən çıxan əks şüalar arasındakı bucağa ... deyilir.***

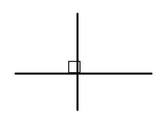
Bucağın dərəcə ölçüsü dedikdə, mərkəzi bu bucağın təpəsində olan çevrənin bucaq daxilində qalan hissəsinin dərəcə ölçüsü başa düşülür.



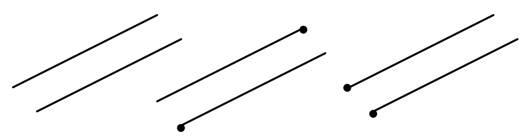
İki d/x arasındakı **bucaq** dedikdə (böyük və ya kiçik sözü işlənmirsə), onların kəsişməsindəki **kiçik bucaq** başa düşülür.

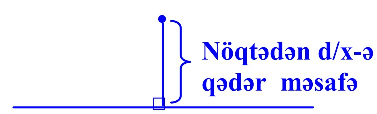


İki d/x arasındakı **bucaq 90º-dirsə**,belə d/x-lər **perpendikulyar (⊥) d/x-lər** , perpendikulyar d/x-lər üzərində olan parçalar (şüalar) perpendikulyar **parçalar (şüalar)** adlanır.



Paralel d/x-lər arasındakı bucaq **0º-dir.**
Əks şüalar arasındakı bucaq **180º-dir.**
Eyni istiqamətli şüalar arasındakı bucaq **0º-dir.**





Qeyd: ***Nöqtədən d/x-ə qədər məsafə dedikdə, bu nöqtədən d/x-ə endirilən perpendikulyarın uzunluğu başa düşülür.***

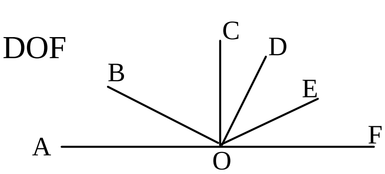
*D/x üzərində olan nöqtə ilə bu d/x arasındakı **məsafə 0 -dır**.*

İki paralel d/x arasındakı məsafə dedikdə bu düz xətlərdən biri üzərindəki ixtiyari nöqtədən digər d/x-ə qədər məsafə başa düşülür.

Çalışma nümunələri

1) *OC ⊥AF , ∠DOE = 30º olduğunu bilərək, COD və EOF bucaqlarının tənbölənləri arasındakı bucağı tapın.*

Həlli: ∠COD:2 + ∠DOE + ∠EOF:2 = (∠COD + ∠EOF):2 + ∠DOF = (90º - 30 º):2 + 30 º = 30 º +30 º = 60 º. Cavab: **60º**



2) *OC ⊥AF,BO⊥OD olduğunu bilərək, şəkildəki iti bucaqlarının sayını tapın.*

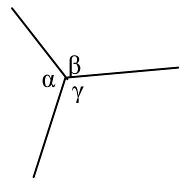
Asanlıqla saya bilərik ki, iti bucaqların **sayı 7-dir.**

§4.Bucağa aid çalışmalar

1. 37^o -li bucağın bir tərəfinə perpendikulyar olan düz xətt digər tərəflə hansı bucağı əmələ gətirir? A)143^o B)53^o C)90^o D) 127^o E) 43^o

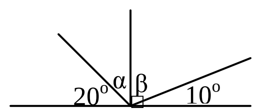
2. 127^o -li bucağın bir tərəfinə perpendikulyar olan düz xətt digər tərəflə hansı bucağı əmələ gətirir? A)37^o B)53^o C)90^o D) 63^o E) 43^o

3.Şəkildəki bucaqlar üçün
$\alpha-\beta = 40^o$,
$\alpha-\gamma = 20^o$.
Ən kiçik bucağı tapın.



A) 90^o B) 80^o C)100^o D) 110^o E) 120^o

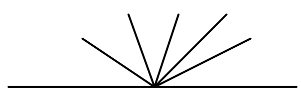
4. Şəkildəki verilənlərə görə α və β bucaqlarının tənbölənləri arasındakı bucağı tapın.



A) 90^o B) 70^o C)65^o D) 75^o E) 85^o

5. Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlardan biri digərinin 25% -nə bərabərdir.Bucaqların fərqini tapın. A) 90^o B) 80^o C)108^o D) 36^o E) 144^o

6.Şəkildə neçə bucaq var?



A)6 B)20 C)7 D)21 E) 22

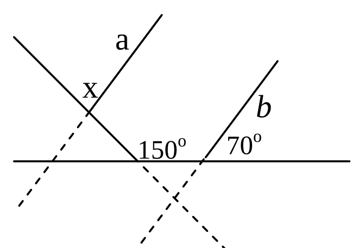
7.Bir saatda dəqiqə əqrəbi neçə dərəcəli bucaq cızır? A) 90^o B) 180^o C)270^o D) 360^o E)0^o

8.Bir saatda saat əqrəbi neçə dərəcəli bucaq cızır? A) 30^o B) 18^o C)12^o D) 36^o E) 24^o

9.Saat 11-də əqrəblər arasındakı bucaq neçə dərəcədir? A) 40^o B)20^o C)32^o D) 30^o E) 45^o

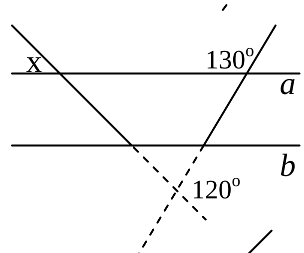
10. Şəkildəki verilənlərə görə ($a\|b$) x-i tapın.

A) 40^o B)60^o C)80^o D) 90^o E) 45^o



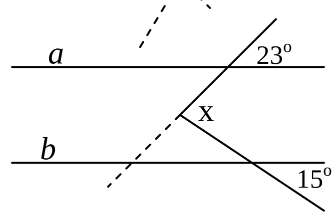
11. Şəkildəki verilənlərə görə ($a\|b$) x-i tapın.

A) 50^o B)60^o C)70^o D) 45^o E) 40^o



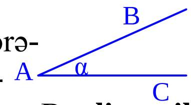
12. Şəkildəki verilənlərə görə ($a\|b$) x-i tapın.

A) 35^o B)36^o C)37^o D)38^o E) 45^o



§5.Bucaq və saatlar. Nöqtə ətrafında dönmə.

Nöqtə ətrafında dönmə



Saat əqrəblərinə nəzər yetirsək görərik ki,əqrəblər saatın mərkəzi ətrafında müəyyən bucaq qədər dönürlər. Bu **dinamika** nöqtə ətrafında dönməyə aid təsəvvürlər yaradır.

Şəkildən aydındır ki, AB şüasını A nöqtəsi ətrafında α qədər döndərməklə AC-ni almaq olar.

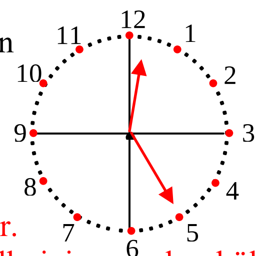
Parçaların nöqtə ətrafında dönməsi də bu qayda ilə şərh edilir.

Dönmə zamanı başlanğıc vəziyyətin qeyd olunması vacibdir.

Dönmə zamanı fiqurun neçə dərəcə dönməsi başlanğıc vəziyyətdən hesablanır.

Dönmə hər iki istiqamətdə aparıla bilər: saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində və əksinə.

Saat və bucaqlar



Hamımıza məlumdur ki,saatın çevrəsi(sferblatı) 60 bərabər hissəyə bölünmüşdür ki, hər ən kiçik aralıq 360º **:** 60 = 6º**.** Deməli, dəqiqə əqrəbi 1 dəqiqədə mərkəz ətrafında 6º dönür. 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 ədədlərinin arası beş bölgüdən ibarət olduğu üçün saat əqrəbi 1 saatda 30º dönür, 1 dəqiqədə isə 30º **:** 60 = 0,5º dönür.

Beləliklə,saat və dəqiqə əqrəbləri arasındakı bucaq saat 9^{00}-da 90º-dir; 7^{00}-da 150º-dir və s.

☺ *Parça özünün bir ucu ətrafında ... döndükdə tam bucaq cızır ;*

☺ *Parça özünün bir ucu ətrafında ... döndükdə açıq bucaq cızır ;*

Çalışmalar

1) Bir sutka ərzində saat və dəqiqə əqrəbləri neçə dəfə **açıq bucaq** əmələ gətirir?
A) 23 ; B) 12 ; C) 20 ; E**)** 22 ; D) 24 .

2) Bir sutka ərzində saat və dəqiqə əqrəbləri neçə dəfə **düz bucaq** əmələ gətirir?
A) 36 ; B**)** 40 ; C) 44 ; D) 42 ; E) 48

3) Bir sutka ərzində saat və dəqiqə əqrəbləri neçə dəfə üst - üstə düşür?
A) 11 ; B) 12 ; C)20 ; D)22 ; E) 24

4) Dəqiqə əqrəbi saat əqrəbindən neçə dəfə çox sürətlə dönür?
A) 6 ; B) 8 ; C)10 ; D)12 ; E) 18

5) Saat 12^{00} -a beş dəqiqə qalmış əqrəblər arasındakı bucağı tapın.
A) 30º ; B) 29 ; C)28,5º ; D)27,5º ; E) 26º

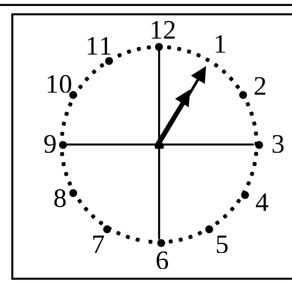
6)*İndi saat 12^{00}-dır.Ən yaxın vaxtda neçə dəqiqədən sonra saat və dəqiqə əqrəbləri perpendikulyar olacaqlar?*
A)$16\frac{5}{11}$; B)$15\frac{5}{11}$; C**)**$16\frac{4}{11}$; D) $15\frac{2}{11}$;E)$13\frac{5}{11}$

7) *İndi saat 12^{00}-dır.Ən yaxın vaxtda neçə dəqiqədən sonra saat və dəqiqə əqrəbləri üst-üstə düşəcəkdir?*
A)$60\frac{5}{11}$;B**)**$65\frac{5}{11}$; C) $64\frac{5}{11}$; D)$66\frac{5}{11}$;E)$63\frac{5}{11}$

8) *İndi saat 18^{00}-dır.Ən yaxın vaxtda neçə dəqiqədən sonra saat və dəqiqə əqrəbləri açıq bucaq əmələ gətirəcəkdir?*
A)$63\frac{5}{11}$;B)$65\frac{5}{11}$;C) $67\frac{5}{11}$; D)$66\frac{4}{11}$;E)$63\frac{4}{11}$

1) *Saat 1-ə 24 dəqiqə işləmiş əqrəblər arasındakı α* ***bucağını*** *hesablayın.*

Həlli. *α = 24·6º-24·0,5º =144º - 12º =* ***132º.***

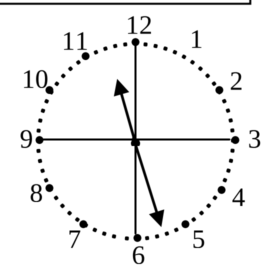


2) *İndi saat 13^{00}-dır.Ən yaxın vaxtda neçə dəqiqədən sonra saat və dəqiqə əqrəbləri üst-üstə düşəcəkdir?*

Həlli. Fərz edək ki, x dəqiqədən sonra əqrəblər üst-üstə düşəcəkdir. Onda dəqiqə əqrəbi 6x , saat əqrəbi isə 0,5x dərəcə dönəcək.

Buradan da alırıq ki, 6x - 0,5 x = 30º⇒ **x =** $5\frac{5}{11}$ dəqiqə.

3) *İndi saat 11^{00}-dır.Ən yaxın vaxtda neçə dəqiqədən sonra saat və dəqiqə əqrəbləri açıq bucaq əmələ gətirəcək?*

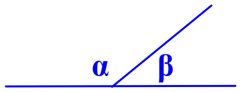


Həlli. 2-ci çalışmadakı mülahizələrə görə 6x +(30º - 0,5 x) =180º⇒

⇒5,5x = 150º ⇒ x = $27\frac{3}{11}$. **Cavab:** x = $27\frac{3}{11}$ dəqiqə.

Bu bölməni öyrənərkən 360º və daha böyük bucaqlar haqqında ilkin praktik təsəvvürlər yaranır.

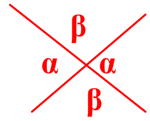
§6. Bucaq cütləri



$\alpha+\beta=180^\circ$

Qonşu bucaqlar

☺ ***Bir tərəfi ... , digər iki tərəfi ... şüalar olan bucaqlar qonşu bucaqlar adlanır.***



Qarşılıqlı və qonşu bucaqlar

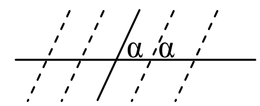
☺ ***... bucaqlar bərabərdirsə, onda onların hər biri 90º-dir,yəni d/x-in bir nöqtəsindən yalnız bir perpendikulyar qaldırmaq olar.***

☺ ***... bucaqların tənbölənləri arasındakı bucaq 180º-dir.***

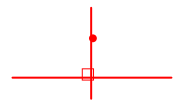
☺ ***... bucaqların tənbölənləri arasındakı bucaq 90º-dir.***

Düz xətt aksiomlarından çıxan nəticələr

*1.İki kəsişən d/x-dən birinin **özünəparalel** yerdəyişməsi zamanı düz xətlər arasındakı **bucaq dəyişmir;***



2. Düz xətt xaricindəki nöqtədən bu d/x-ə yalnız bir perpendikulyar d/x endirmək olar.

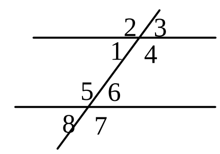


3.İki paralel düz xətt 3-cü d/x-lə kəsişdikdə :

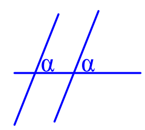
a) daxili çarpaz bucaqlar bərabərdir ($\angle 1=\angle 6, \angle 4=\angle 5$);

b) uyğun birtərəfli bucaqlar bərabərdir ($\angle 3=\angle 6, \angle 2=\angle 5$) ;

c) daxili birtərəfli bucaqların cəmi 180º ($\angle 4+\angle 6=180^\circ$);

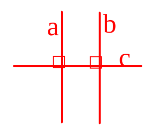


4.Bir düz xətt iki d/x-lə kəsişdikdə uyğun birtərəfli bucaqlar bərabərdirsə onda bu d/x-lər paraleldir.



5. Eyni bir düz xəttə ⊥ olan iki düz xətt paraleldir:

$$a\perp c,\ b\perp c \longrightarrow a\parallel b;$$

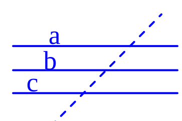


6. İki paralel düz xətdən birinə⊥ olan d/x digərinə də ⊥-dır:

$$a\parallel b,\ a\perp c \longrightarrow b\perp c;$$

7.Üçüncü d/x-ə paralel olan iki düz xətt paraleldir:

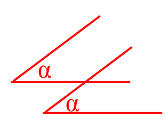
$$a\parallel c,\ b\parallel c \longrightarrow a\parallel b;$$



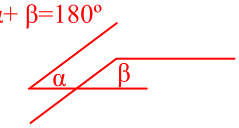
Uyğun tərəfləri paralel , perpendikulyar olan bucaqlar

Tərif:***Tərəfləri cüt-cüt paralel (perpendikulyar) olan bucaqlara uyğun tərəfləri paralel (perpendikulyar) olan bucaqlar deyilir.***

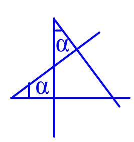
**** Uyğun tərəfləri paralel olan bucaqlar ya bərabər, ya da onların cəmi 180º-dir.***

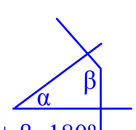


$\alpha+\beta=180^\circ$



**** Uyğun tərəfləri ⊥ olan bucaqlar ya bərabər, ya da onların cəmi 180º-dir.***





$\alpha+\beta=180^\circ$

Bu xassələrin isbatı uyğun şəkillərdən **aydındır**.

Çalışma

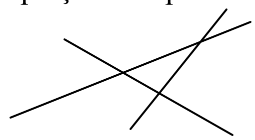
Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan iki bucağın fərqi 30º-dir. Böyük bucaq neçə dərəcədir?

Həlli. Həmin bucaqları α və β ilə işarə edək.Şərtə görə $\alpha-\beta=30^\circ$, digər tərəfdən $\alpha+\beta=180^\circ$.Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplamaqla $\alpha=105^\circ$ alırıq.Buradan da , $\beta=75^\circ$. Cavab**: 105º**

☺ ***Uyğun tərəfləri paralel (⊥) olan bucaqlara aid başqa şə - killər də çəkə bilərsinizmi ?***

§7. Bucaq cütlərinə aid çalışmalar

1.Şəkildə neçə cüt qonşu bucaqlar var? A)15 B)12 C)20 D)24 E) 16



2.Şəkildə neçə cüt qarşılıqlı bucaqlar var? A)3 B)4 C)5 D)6 E)8

3.Uyğun tərəfləri paralel olan bucaqlardan biri digərindən beş dəfə böyükdür.Böyük bucaq kiçik bucaqdan neçə dərəcə çoxdur? A)120^o B)150^o C)90^o D) 110^o E)30^o

4. Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlardan biri digərindən 20 % kiçikdir.Böyük bucaq kiçik bucaqdan neçə dəfə böyükdür? A)1,5 B)1,25 C)2 D)2,5 E) 2,25

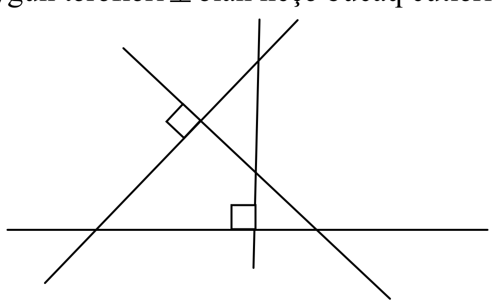
5. Uyğun tərəfləri paralel olan bucaqlardan biri digərindən dörd dəfə kiçikdir.Böyük bucaq kiçik bucaqdan neçə dərəcə çoxdur? A) 90^o B) 80^o C)108^o D) 36^o E) 144^o

6. Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlardan biri digərindən 30^o kiçikdir.Böyük bucaq kiçik bucaqdan neçə dəfə böyükdür? A)1,4 B)1,2 C)1,5 D)2 E) 2,1

7.Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlardan biri digərindən 50% çoxdur. Kiçik bucaq böyük bucaqdan neçə dəfə kiçikdir? A)1,5 B)1,2 C)2,5 D)2 E) 2,2

8. Uyğun tərəfləri perpendikulyar olan bucaqlardan biri digərinin 25% -nə bərabərdir.Bucaqların fərqini tapın. A) 90^o B) 80^o C)108^o D) 36^o E) 144^o

9. Şəkildə uyğun tərəfləri $\perp$ olan neçə bucaq cütləri var?



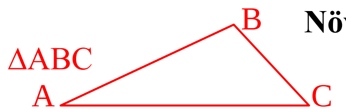
10. Şəkildə neçə iti,düz və kor bucaq var? A)3,4,3 B)6,8,4 C)6,8,8 D)6,4,8 E) 8,8,8

11. Hansı mülahizələr doğrudur ?

1. Qonşu bucaqların tənbölənləri perpendikulyardır.
2. Qonşu bucaqların tənbölənləri paralel ola bilər.
3. Qonşu bucaqların uyğun tərfləri $\perp$ ola bilər.
4. Qarşılıqlı bucaqların tənbölənləri arasındakı bucaq 0^o-dir.
5. Qarşılıqlı bucaqların tənbölənləri arasındakı bucaq180^o-dir.
6. Qarşılıqlı bucaqların tənbölənləri arasındakı bucaq 90^o ola bilər.

A)1,3,4 B)1,3,6 C) 1,3,5 D)4,5,6 E) 3,5,6

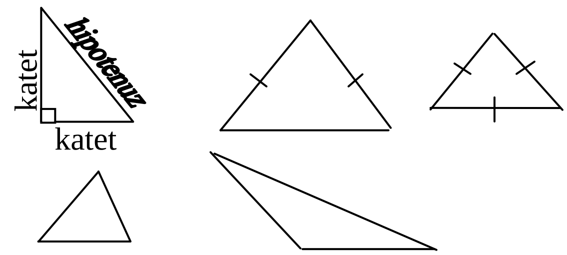
§8. Üçbucağın tərifi , elementləri , növləri.



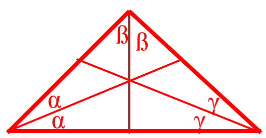
Növləri: *itibucaqlı,düzbucaqlı,korbucaqlı ,bərabəryanlı, bərabərtərəfli* **Δ.**

Tərif**:** ***Bir d/x üzərində olmayan üç nöqtənin cüt-cüt birləşdirilməsindən alınan müstəvi fiquruna üçbucaq (Δ) deyilir.***

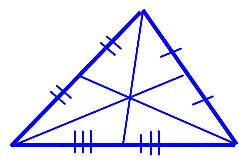
Elementləri: *3 bucaq , 3 tərəf , 3 tənbölən, 3 hündürlük , 3 median , sahə , perimetr*



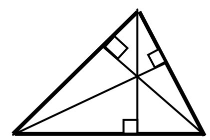
Itibucaqlı Δ korbucaqlı Δ



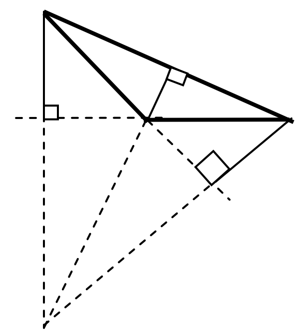
Tənbölənlər

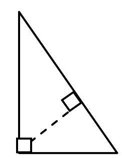


Medianlar



Hündürlüklər





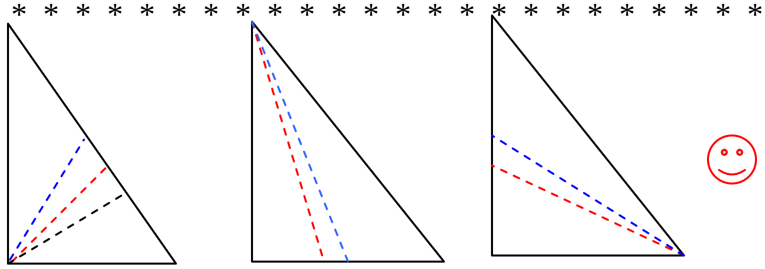
Təpə ilə qarşı tərəfi birləşdirən və təpədəki bucağı yarı bölən d/x parçasına tənbölən deyilir.

Təpə ilə qarşı tərəfin ortasını birləşdirən d/x parçasına median deyilir.

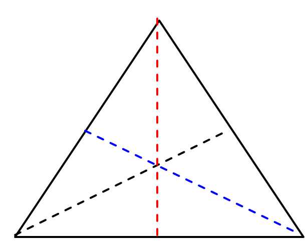
Təpədən qarşı tərəfə və ya onun uzantısına endirilən perpendikulyara ***hündürlük*** *deyilir.*

T a p a   b i l ə r s i n i z m i ?

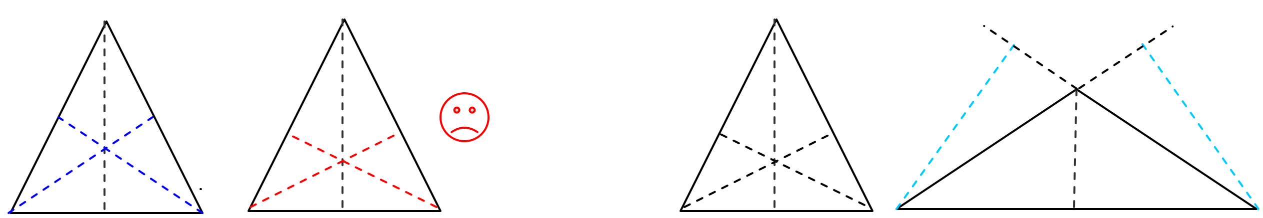
1.Bir bucağı **...** bucaq olan üçbucağa ... üçbucaq deyilir.
2.Hər bir bucağı **...** olan üçbucağa **...** üçbucaq deyilir.
3.Üçbucağın yalnız bir **...** bucağı ola bilər.
4.Düz bucaq qarşısındakı tərəfə **...** deyilir.
5.Düz bucağa bitişik tərəflərə **...** deyilir.
6.İki tərəfi bərabər olan üçbucağa **...** üçbucaq deyilir.
7.Yan tərəflər arasındakı bucağa **...** deyilir.
8.Təpə bucağı qarşısındakı tərəfə **...** deyilir.
9. Bərabəryanlı **...** Δ-ın katetləri bərabərdir.
10.Üç tərəfi bərabər olan Δ-a **...** deyilir.
11. ... üçbucağın hər bir bucağı **...** dərəcədir
12. ... Δ-ın hündürlükləri təpədə kəsişir.



Düzbucaqlı üçbucaqlar



Bərabərtərəfli üçbucaq



Bərabəryanlı üçbucaqlar.

Üçbucağın müxtəlif növlərindəki ***tənbölən*** , ***median*** *və* ***hündürlükləri*** göstərin!

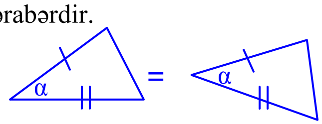
§9. Üçbucaqların bərabərlik əlamətləri. Fales teoremi.Orta xətt

Tərif: Uyğun tərəf və uyğun bucaqları bərabər olan,yəni üst-üstə salına bilən üçbucaqlara bərabər Δ-lar deyilir.

Birinci əlamət (TBT)

Bir üçbucağın iki tərəfi və bunlar arasındakı bucaq,uyğun olaraq digər üçbucağın iki tərəfi və onlar arasındakı bucağa bərabərdirsə , onda bu üçbucaqlar bərabərdir.

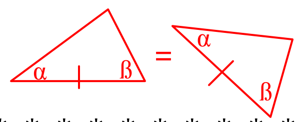
İsbatı. Şəkilə nəzər yetirsək soldakı üçbucağı ***özünəparalel yerdəyişmə*** *və* ***nöqtə ətrafında dönmə*** ilə sağdakı üçbucaqla üst-üstə salmaq olar,yəni bu üçbucaqlar bərabərdir.



İkinci əlamət (BTB)

Bir üçbucağın bir tərəfi və buna bitişik iki bucağı, uyğun olaraq digər üçbucağın bir tərəfi və ona bitişik iki bucağına bərabərdisə, onda bu üçbucaqlar bərabərdir.

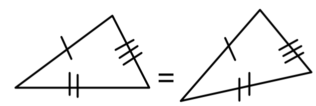
İsbatı. Şəkilə nəzər yetirsək sol və sağdakı üçbucaqların bərabər tərəflərini ***özünəparalel yerdəyişmə və nöqtə ətrafında dönmə*** ilə üst-üstə salmaq olar.Bu tərəflərə bitişik bucaqlar da bərabər olduğundan digər tərəflər də üst-üstə düşəcəkdir.



Üçüncü əlamət (TTT)

Bir üçbucağın üç tərəfi ,uyğun olaraq digər üçbucağın üç tərəfinə bərabərdirsə, onda bu üçbucaqlar bərabərdir.

Bu əlamətin isbatı da 1-ci və 2-ci əlamətlərdəki mülahizələrlə həyata keçirilir.

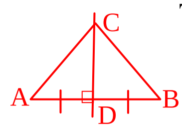


* *

Teorem 1.***Parçanın orta perpendikulyarı üzərindəki ixtiyari nöqtə (C) bu parçanın uclarından bərabər məsafədədir:***

AC = BC

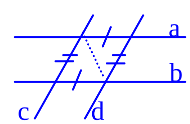
İsbatı.1-ci əlamətə görə ΔACD = ΔBCD ⇒ **AC = BC.**



Tərif: *Parçanın orta nöqtəsindən qaldırılan perpendikulyara bu parçanın* ***orta perpendikulyarı*** *deyilir*.

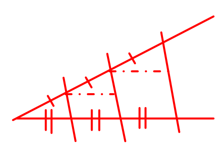
Düz xətt boyunca qatladıqda fiqurun **d/x-dən müxtəlif tərəflərdə** qalan hissələri üst-üstə düşərsə belə d/x-ə fiqurun **simmetriya oxu** deyilir. Məsələn, parçanın orta perpendikulyarı bu parçanın simmetriya oxudur; d/x-in ixtiyari *nöqtəsindən çəkilən perpendikulyar bu d/x-in simmetriya oxudur və s.*

Teorem 2.*İki paralel d/x-in digər paralel d/x-lər arasında qalan parçaları bərabərdir (a || b, c || d) .*



İsbatı. 2-ci əlamətə görə paralel d/x-lərin kəsişməsindəki üçbucaqlar bərabərdir.Buradan da nəticədəki parçaların bərabərliyi alınır.

Teorem (Fales).***Bucağın bir tərəfi üzərindəki bərabər parçaların uclarından çəkilmiş paralel d/x-lər digər tərəf üzərində də bərabər parçalar ayırır.***

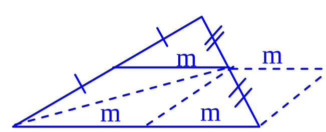


Bu **teoremin** isbatı 1-ci əlamətdən alınır.

* *

Tərif:***Üçbucağın iki tərəfinin orta nöqtəsini birləşdirən d/x parçasına orta xətt deyilir.***

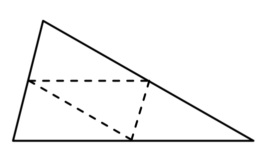
Üçbucağın üç orta xətti vardır.



Teorem.***Üçbucağın orta xətti 3-cü tərəfə paralel olub uzunluğu paralel olduğu tərəfin yarısına bərabərdir.***

Bu xassənin isbatı şəkildə göstərildiyi kimi Δ-ların bərabərlik əlamətlərindən alınır (sol yan tərəfə paralellər çəkilmişdir).

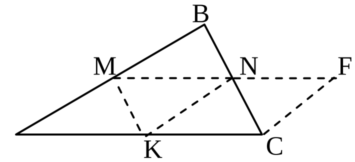
Nəticə.*Üçbucağın üç orta xətti bu üçbucağı dörd bərabər üçbucaqlara ayırır.*



§ 10.Çalışmalar

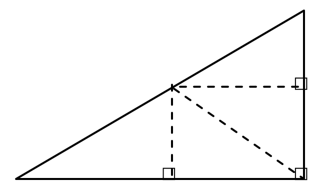
1. M,N,K tərəflərin orta nöqtələri, NF = KC , KN = FC olduğunu bilərək, şəkildəki bərabər üçbucaqların sayını tapın.

A) 1 B) 2 C)3 D) 4 E)5



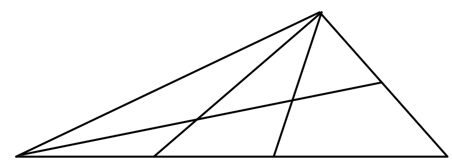
2. Çalışma 1-dəki şərtlərə görə şəkildə MN parçasına bərabər neçə parça var?

A) 1 B) 2 C)3 D) 4 E)5



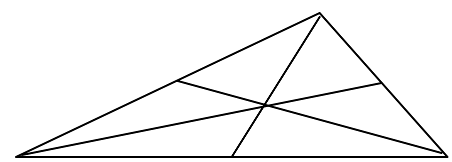
3. Düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuzun orta nöqtəsindən katetlərə perpendikulyarlar endirilmişdir.Şəkildə neçə bərabər üçbucaqlar cütü var?

A) 3 B) 4 C)5 D) 6 E)7



4. Şəkildə neçə üçbucaq var?

A) 6 B) 12 C)15 D)1 6 E)17



5. Medianların üçü də çəkildikdə şəkildə neçə üçbucaq əmələ gəlir?

A) 6 B) 8 C)15 D) 16 E)17

6. İxtiyari Δ-ın medianlarının üçü də çəkildikdə şəkildə neçə cüt bərabər üçbucaqlar əmələ gəlir?

A) 6 B) 4 C)3 D) 8 E) belə Δ-lar yoxdur

7. Hansi təklif doğru deyil?
1.İxtiyari Δ-ın iki tərəfinin orta perpendikulyarının kəsişmə nöqtəsi bu Δ-ın təpələrindən bərabər məsafədədir;
2.İxtiyari Δ-ın iki bucağının tənbölənlərinin kəsişmə nöqtəsi bu Δ-ın təpələrindən bərabər məsafədədir;
3.İxtiyari Δ-ın iki bucağının tənbölənlərinin kəsişmə nöqtəsi bu Δ-ın tərəflərindən bərabər məsafədədir;
4.İxtiyari Δ-ın iki tərəfinin orta perpendikulyarının kəsişmə nöqtəsi bu Δ-ın tərəflərindən bərabər məsafədədir;

A) 1 və 2 B) 2 və 4 C) 3 D) 2 və 4 E) hamısı

10. Üçbucağın iki tərəfi 16 sm, 11 sm-dir. Bu tərəflərin ortasını birləşdirən parçanın ən böyük tam qiyməti neçə sm-dir?

A) 16 B) 12 C)13 D) 13,5 E)13

11. Üçbucağın yan tərəflərinin hər biri oturacaqdan 6 sm böyükdür.Yan tərəfləri birləşdirən orta xətt 5 sm-dir.Üçbucağın perimetrini tapın.

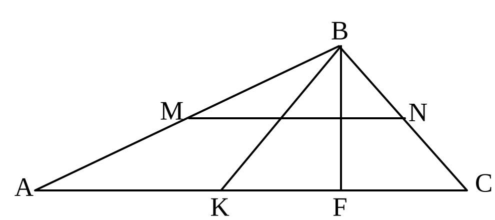
A) 36 B) 40 C)42 D) 45 E)43

8. Üçbucağın yalnız iki medianı bərabər olduqda hansi *hökm* doğrudur?
1. Bu üçbucaq bərabəryanlıdır;
2.Bu üçbucaq bərabərtərəflidir;
3.Bu üçbucaq düzbucaqlı Δ-dır;
4.Bu üçbucaq ixtiyari üçbucaq ola bilər

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) hamısı

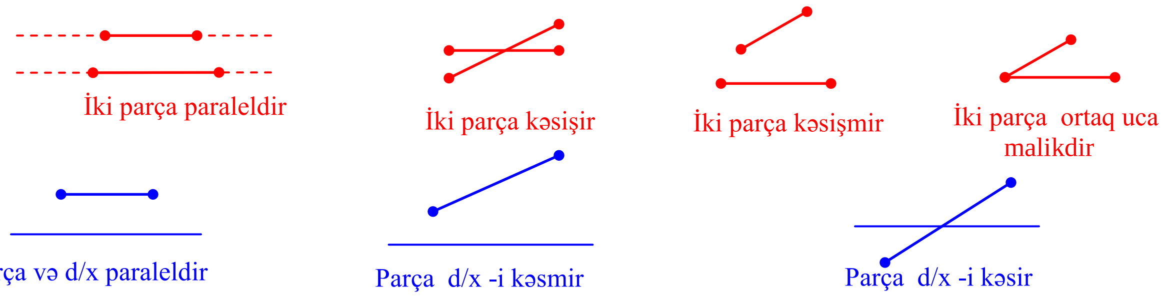
9. MN orta xətt , BK və BF ixtiyari parçalardır. Şəkildə neçə cüt bərabər parçalar var?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



§ 11. Parçanın (mailin) düz xətt üzərindəki proyeksiyası

Parça və düz xətlərin qarşılıqlı vəziyyətləri

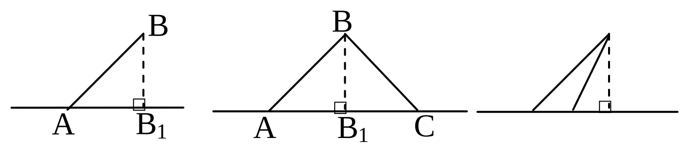


* *

Nöqtədən (B) d/x-ə endirilmiş perpendikulyarın **oturacağına** (B_1) nöqtənin d/x üzərindəki **proyeksiyası** deyilir.

Tərif: Bir ucu (A) d/x üzərində olan və bu d/x-ə perpendikulyar ***olmayan*** parçaya(AB) **mail** deyilir.

Mailin d/x üzərindəki *ucuna(*A , C*)* mailin **oturacağı** deyilir.

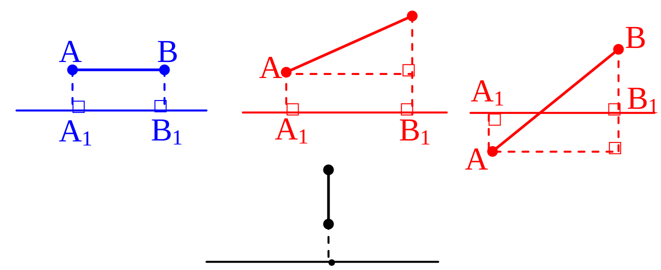


Şəkildə AB mail, AB_1 isə onun d/x üzərindəki proyeksiyasıdır.Aydındır ki, *bərabər* maillərin proyeksiyaları da *bərabərdir*.Bir nöqtədən çəkilmiş iki maildən böyüyünün proyeksiyası *böyük*, kiçiyinin proyeksiyası *kiçikdir*.

* *

Parçanın proyeksiyası onun hər bir nöqtəsinin d/x üzərindəki proyeksiyaları çoxluğudur.

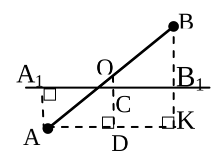
AB parçanın d/x üzərindəki *proyeksiyası* (A_1 B_1) şəkillərdə təsvir edilmişdir.



☺ **... parçanın proyeksiyası özündən kiçikdir;**

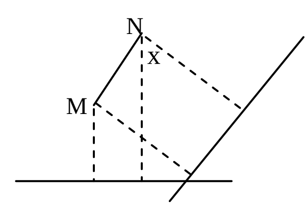
☺ **... parçanın proyeksiyası özünə bərabərdir;**

☺ **... parçanın proyeksiyası nöqtədir.**



Çalışma 1. *Düz xətti kəsən parçanın ucları bu d/x-dən 20 sm və 30 sm məsafədədir.Parçanın orta nöqtəsi d/x-dən hansı məsafədədir.*

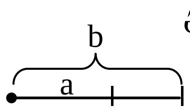
Həlli. Şərtə görə AA_1 = 20sm,BB_1 =30sm-dir.AB parçasının orta nöqtəsini O ilə işarə edək.A nöqtəsindən BB_1-in uzantısına AK perpendikulyarını endirək.Onda OD = BK**:**2 = (20 + 30):2 = = 25$\Rightarrow$ **OC = 25 - 20 = 5(sm).**



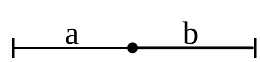
Çalışma 2. Şəkildə M və N nöqtələrindən verilmiş düz xətlərə perpendikulyarlar endirilmişdi.Bu düz xətlər arasındakı bucağın 40^o olduğunu bilərək x-i tapın.

A)30^o ; B) 40^o; C)30^o ; D) 50^o ; E)50^o

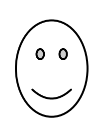
Ə l a v ə q e y d l ə r



a və b parçaları arasındakı bucaq 0^o-dir

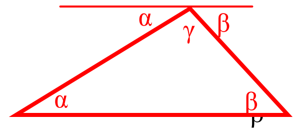


a və b parçaları arasındakı bucaq 180^o-dir



§12. Üçbucağın öz xassələri

Burada istənilən üçbucağa aid xassələr sadalanır.

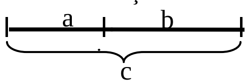


1. ***İstənilən Δ-ın daxili bucaqlarının cəmi 180°-dir.***

Bu xassənin isbatı şəkildən aydın görünür: **α+β+γ =180°.**

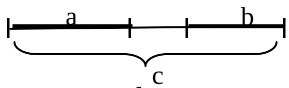
2. ***Üçbucaqda istənilən bir tərəfin uzunluğu digər iki tərəfin cəmindən kiçikdir.***

Bu xassənin isbatı şəkillərdən aydındır:



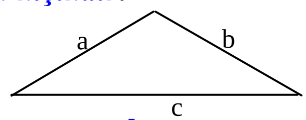
a+b = c

Bu halda Δ əmələ gəlmir;



a + b < c

bu halda da Δ əmələ gəlmir;



a + b > c

***bu halda* Δ *əmələ gəlir*;**

Tərəfləri a , b, c olan üçbucaq üçün a + c > b, c + b > a münasibətləri eyni qayda ilə isbat olunur. Bu bərabərsizliklərdən alırıq: a > c-b; b>a-c,c>a-b.

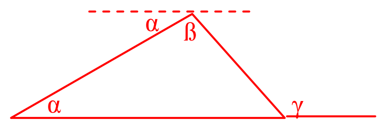
Nəticə. **Tərəfləri a , b, c olan üçbucaq üçün:** **|b - c|< a < b + c**

|a - c|< b < a + c

☺ **Sonuncu bərabərsizlikləri sözlə ifadə edin .** **|a - b|< c < a + b**

3. ***Üçbucağın xarici bucağı ona qonşu olmayan daxili bucaqların cəminə bərabərdir: γ = α + β***

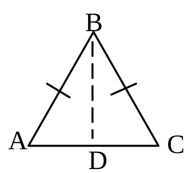
Bu xassənin isbatı şəkildən aydındır.



4. ***Üçbucaqda bərabər tərəflər qarşısında bərabər bucaqlar durur.***

İsbatı. Tutaq ki**,** AB = BC. Göstərək ki, $\angle A = \angle C$. BD medianını çəkək.Onda üçbucaqların bərabərliyinin 3-cü əlamətinə görə

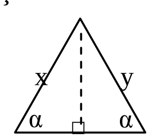
$\Delta ABD = \Delta BDC \Rightarrow \angle A = \angle C.$



Tərs mülahizə. ***Üçbucaqda bərabər bucaqlar qarşısında bərabər tərəflər durur.***

İsbatı. Tutaq ki, uçbucağın iki bucağı bərabərdir.Göstərək ki, x = y.Təpədən hündürlük endirək. Onda üçbucaqların bərabərliyinin 2-ci əlamətinə görə şəkildəki kiçik Δ-lar bərabərdir.Buradan alırıq ki,

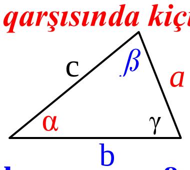
x = y .



5. ***Üçbucaqda böyük tərəf qarşısında böyük bucaq, kiçik tərəf qarşısında kiçik bucaq durur.***

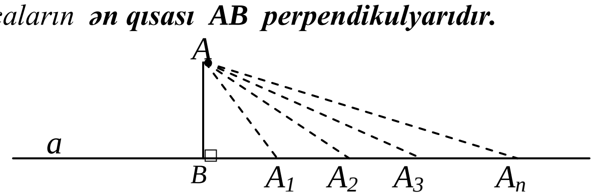
Tərs mülahizə də doğrudur:

Üçbucaqda böyük bucaq qarşısında böyük tərəf, kiçik bucaq qarşısında kiçik tərəf durur.

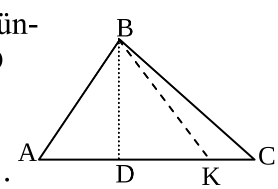


a< b<c ↔ α<β<γ

Qeyd. *Aşağıdakı şəkildən aydındır ki, a d/x üzərindəki nöqtələr B-dən uzaqlaşdıqca* $AA_1, AA_2, AA_3, \ldots, AA_n$ *mailləri böyüyür, d/x-lə maillər arasındakı* ***bucaqlar*** *isə kiçilir.Aydındır ki, A nöqtəsilə a d/x-ni birləşdirən parçaların* ***ən qısası AB perpendikulyarıdır.***

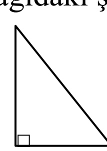


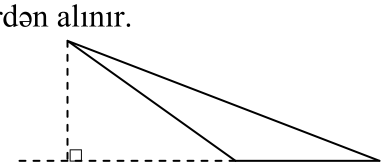
5-ci xassənin isbatı.BD hündürlüyünü çəkək.AD = KD şərti ilə K nöqtəsini qeyd edək.4-cü xassəyə əsasən AB = BK , ∠ A = ∠ *AKB*.



∠ *AKB* xarici bucaq olduğu üçün ∠**A** > ∠**C** , şəkildən aydındır ki**, BC > BK = AB.**Beləliklə, **AC oturacağına bitişik iti A və C bucaqları üçün düz və tərs mülahizə isbat olundu.**

Oturacağa bitişik bucaqlardan biri düz və ya kor bucaq olduqda 5-ci xassənin isbatı aşağıdakı şəkillərdən alınır.





§13. Çalışmalar

1.Üçbucağın bucaqları 1 , 2 , 3 ədədləri ilə mütənasibdir.
Böyük bucağa qonşu olan bucağı tapın. A) 90^o B) 120^o C) 50^o D) 60^o E) 110^o

2.Üçbucağın bucaqlarının nisbəti 2 **:** 3 **:** 4 şəklindədir.
Kiçik bucaq təpəsindəki xarici bucağı tapın. A) 90^o B) 120^o C) 140^o D)160^o E)110^o

3. Aşağıdakı mülahizələrdən neçəsi doğru deyil?

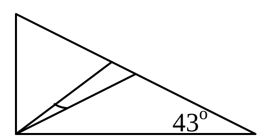
1. Üçbucağın tərəfləri 1 , 2 , 3 ədədləri ilə mütənasib ola bilər;
2. Üçbucağın tərəfləri 2 , 3 , 4 ədədləri ilə mütənasib ola bilər;
3. Üçbucağın tərəfləri 4 , 5 , 6 ədədləri ilə mütənasib ola bilməz;
4. Üçbucağın tərəfləri 5, 6 , 7 ədədləri ilə mütənasib ola bilər;
5. Üçbucağın tərəfləri 3 , 4 , 5 ədədləri ilə mütənasib ola bilməz. A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5

4. Üçbucağın iki tərəfi 2 **:** 3 nisbətində, üçüncü tərəf
bu iki tərəfin cəmindən 5 sm kiçikdir.Perimetrin 35 sm
olduğunu bilərək böyük tərəfi tapın. A) 8 sm; B) 12 sm;C)15 sm; D)16sm;E)10sm

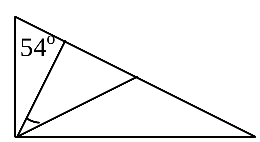
5. Üçbucağın tərəfləri 2 **:**3**:**3 nisbətində, böyük
tərəflərin cəmi 24 sm-dir.Kiçik tərəfi tapın. A) 6 sm; B) 8 sm;C)10 sm; D)12 sm; E) 9 sm

6. Üçbucağın tərəfləri 2 **:**3**:***x* nisbətindədir.x-in ən
böyük və ən kiçik tam qiymətləri cəmini tapın. A) 6; B) 8; C)9 ; D)10; E) 12

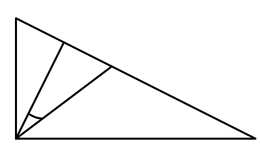
7. Düzbucaqlı üçbucağın iti bucaqlarından biri 43^o-dir.
Düz bucaq təpəsindən çəkilmiş median və tənbölən
arasındakı bucağı tapın.
A) 2^o B) 4^o C) 5^o D) 3^o E) 6^o



8. Düzbucaqlı üçbucağın iti bucaqlarından biri 54^o-dir.
Düz bucaq təpəsindən çəkilmiş median və hündürlük
arasındakı bucağı tapın.
A) 12^o B)1 4^o C)16^o D) 18^o E) 15^o

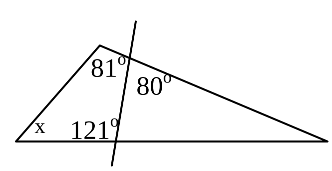


9. Düzbucaqlı üçbucağın iti bucaqlarından biri 40^o-dir.
Düz bucaq təpəsindən çəkilmiş hündürlük və tənbölən
arasındakı bucağı tapın.
A) 1^o B)2^o C) 3^o D) 4^o E) 5^o



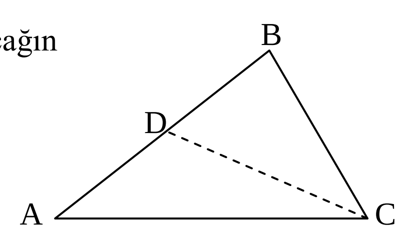
10. Şəkilə əsasən x bucağını tapın**.**

A) 41^o B)52^o C) 57^o D) 58^o E) 59^o



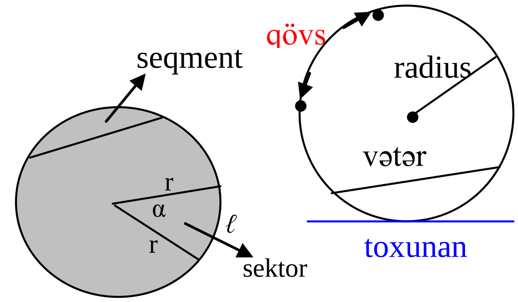
11. Bərabəryanlı ABC üçbucağının(AB = AC) CD medianı bu üçbucağın
perimetrini yarıya bölür.Təpə bucağı neçə dərəcədir?

A) 30^o B)45^o C) 60^o D) 18^o E)20^o



§14. Çevrə və dairə

Tərif**: *Eyni bir nöqtədən bərabər məsafədə olan nöqtələr çoxluğuna çevrə deyilir.Həmin nöqtəyə çevrənin mərkəzi, mərkəzlə çevrəni birləşdirən parçaya radius (r) deyilir.***



*Çevrənin iki nöqtəsini birləşdirən parçaya **vətər**, mərkəzdən keçən vətərə diametr (d) deyilir**:*** **$d = 2r$**

*Çevrə ilə məhdud edilmiş müstəvi fiqurun*a **dairə** *deyilir.Dairənin hissələri:* **sektor,seqment**.

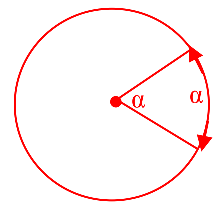
Çevrə ilə yalnız bir ortaq nöqtəyə malik olan d/x-ə **toxunan deyilir.**

Çevrənin iki nöqtəsi arasında qalan hissəsinə qövs deyilir.

***Çevrənin uzunluğu**: $\ell = 2\pi r$; ($\pi \approx 3,14$)*

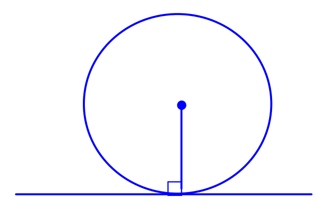
***Dairənin sahəsi**: $S = \pi r^2$*

*Təpəsi çevrənin mərkəzində , tərəfləri radiuslar olan bucağa **mərkəzi bucaq** deyilir.*



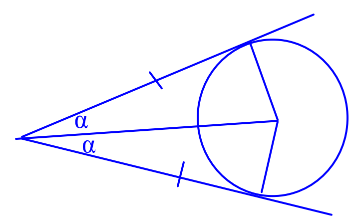
Mərkəzi bucağın qiyməti söykəndiyi qövslə ölçülür.

Xassə 1***. Toxunma nöqtəsindən çəkilmiş radius toxunana perpendikulyardır.***



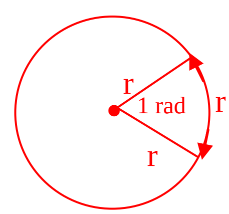
Bu xassənin isbatı aydındır,çünki nöqtədən d/x-ə qədər ən qısa məsafə həmin nöqtədən bu d/x-ə endirilmiş perpendikulyarın uzunluğu olduğu üçün mərkəzdən toxunana endirilən perpendikulyar radiusla üst - üstə düşür.

Xassə 2***. Eyni bir nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunanlar bərabərdir.Bu nöqtəni mərkəzlə birləşdirən d/x parçası toxunanlar arasındakı bucağın tənbölənidir.***



İsbatı. Şəkildəki düzbucaqlı üçbucaqların ortaq hipotenuzları və iki katetləri(radiuslar) bərabər olduğundan bu üçbucaqlar bərabərdir.Buradan da xassənin doğruluğu alınır.

Tərif**: *Söykəndiyi qövsün uzunluğu radiusa bərabər olan mərkəzi bucağın qiyməti bir radian qəbul edilir*.**



α mərkəzi bucağının radianla qiyməti

$$\alpha = \frac{\ell}{r}$$

düsturu ilə ölçülür, burada ℓ – uyğun qövsün uzunluğu, r - çevrənin radiusudur.

***Nəticə**.Tam bucaq* $= \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ *rad. ,*

açıq bucaq $= \pi$ *rad., düz bucaq=* $\frac{\pi}{2}$ *rad.*

Sektor və seqmentin sahələri

α – radianla ölçüldükdə

$S_{sek} = \ell r:2 = \alpha r^2:2, \quad S_{seq} = (\alpha - \sin\alpha) r^2:2$.

☺ **$180^o = \pi$**

90^o = ... ; 60^o = ... ;

45^o = ... 30^o = ... ;

18^o= ... ; 15^o = ...

$22,5^o$ = **...** ; $7,5^o$ = **...** ;

1^o = **...** ;

1 rad = **...**

§15. Çalışmalar

1.Radiusu 9 sm olan çevrənin 50^{o}-li mərkəzi bucağın qövsünün uzunluğunu tapın.

2.Sahəsi 6π sm^2 olan dairənin 20^{o}-li mərkəzi bucağına uyğun qövsün uzunluğunu tapın.

3.Uzunluğu 12 π sm olan çevrənin 4 sm-lik qövsünə uyğun mərkəzi bucağı neçə dərəcədir?

4.Diametri 6 sm olan çevrənin 45^{o}-li mərkəzi bucağına uyğun seqmentin sahəsini tapın.

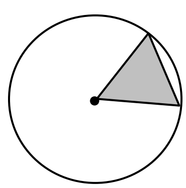
5. Radiusu 18 sm olan çevrənin 72^{o} -li qövsünün uzunluğunu tapın.

6. Diametri 16 sm olan dairədə 60^{o}-li qövsə uyğun seqmentin sahəsini tapın.

7. Sahəsi 6π sm^2 olan seqmentin qövsü 30^{o}-dir. Bu qövsə söykənən sektorun sahəsini tapın.

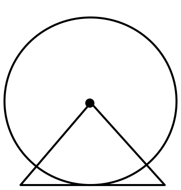
8. Sahəsi 4π sm^2 olan sektorun qövsü 45^{o}-dir. Bu qövsə söykənən seqmentin sahəsini tapın.

9. Sahəsi 12π sm^2 olan sektorun qövsü 36^{o}-dir.Bu qövsə uyğun üçbucağın sahəsini tapın.



10. Diametri 6 sm olan dairənin 20^{o}-li mərkəzi bucağına uyğun sektorun sahəsini tapın.

11. Radiusu 10 sm olan çevrənin mərkəzi bərabəryanlı üçbucağın təpə nöqtəsində olub oturacağa toxunur. Üçbucaq daxilindəki qövsün uzunluğu 5π sm-dir. Üçbucağın sahəsini tapın.



12. Radiusu 15 sm olan çevrənin 10^{o}-li mərkəzi bucağın qövsünün uzunluğunu tapın.

13. Diametri 8 sm olan çevrənin 3 π sm-lik qövsü neçə dərəcədir?

14. Uzunluğu 2 π sm olan çevrə qövsü 24^{o} -dir. Çevrənin radiusu neçə sm-dir?

15. Diametri 30 sm olan çevrənin 60^{o}-li mərkəzi bucağına uyğun seqmentin sahəsini tapın.

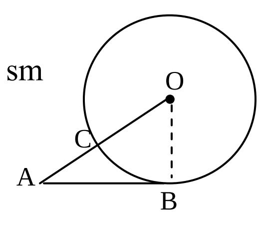
16. Radiusu 15 sm olan çevrə xaricindəki nöqtə çevrədən 10 sm məsafədədir.Bu nöqtədən çevrəyə çəkilən toxunanın uzunluğunu tapın.

17. Diametri 36 sm olan dairədə 90^{o}-li qövsə uyğun seqmentin sahəsini tapın.

18. Sahəsi 16π sm^2 olan seqmentin qövsü 60^{o}-dir. Bu qövsə söykənən sektorun sahəsini tapın.

19. Sahəsi 24π sm^2 olan sektorun qövsü 30^{o}-dir. Bu qövsə söykənən seqmentin sahəsini tapın.

20. Xaricindəki nöqtədən çevrəyə toxunan çəkilmişdir.AC = OC = 1 sm olduğunu bilərək, BOC sektorunun sahəsini tapın.

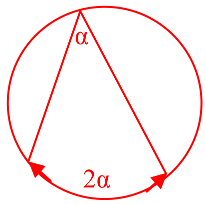


21. Diametri 16 sm olan dairənin 24^{o}-li mərkəzi bucağına uyğun sektorun sahəsini tapın.

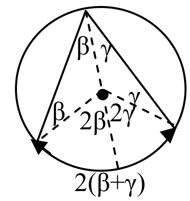
22. Sahəsi 9π sm^2 olan sektorun qövsü 12^{o}-dir. Dairənin diametrini tapın.

§16. Təpəsi çevrə üzərində,daxilində və xaricində olan bucaqlar

Daxilə çəkilmiş bucaq.



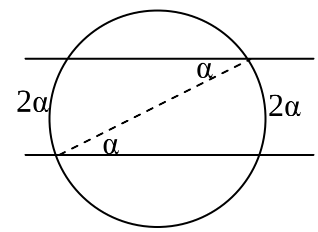
Tərif: ***Təpəsi çevrə üzərində,tərəfləri çevrəni kəsən bucağa daxilə çəkilmiş bucaq*** deyilir.



Xassə 1. ***Daxilə çəkilmiş bucağın qiyməti söykəndiyi qövsün yarısına bərabərdir.***

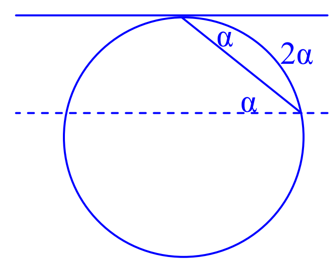
Bu xassənin isbatı şəkildən aydındır.
(α = β+γ)

Xassə 2. *Çevrənin iki paralel düz xətt arasında qalan hissələri bərabərdir.*
Bu xassənin isbatı şəkildən aydındır.



***Nəticə*.**Bərabər vətərlərin gərdiyi qövslər bərabərdir.

Xassə 3***. Toxunma nöqtəsindən çəkilmiş vətərin toxunanla əmələ gətirdiyi bucağın qiyməti vətərin gərdiyi qövsün yarısına bərabərdir.***

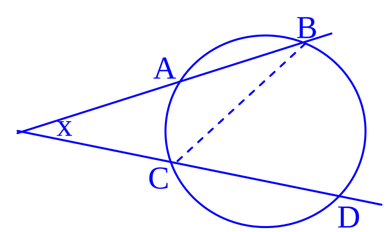


İsbatı. Vətərin digər ucundan toxunana paralel çəkək.Çevrənin paralel düz xətlər arasında qalan hissələri bərabər olduğundan daxilə çəkilmiş bucağın xassəsinə əsasən 2-ci xassədəki hökm doğrudur**.**

Təpəsi çevrə xaricində olan bucaq

Xassə 3.*Çevrə xaricindəki eyni bir nöqtədən çəkilmiş iki kəsən (iki toxunan,toxunan və kəsən) arasındakı bucaq bu bucaq daxilində qalan çevrə qövsləri fərqinin yarısına bərabərdir:*

$$x = \frac{B\breve{D} - A\breve{C}}{2}.$$

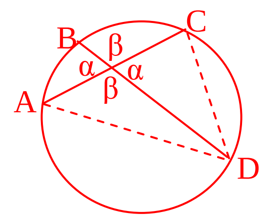


İsbatı. Xarici bucağın xassəsinə görə β = α + x → x = β- α =

$$= \frac{B\breve{D}}{2} - \frac{A\breve{C}}{2} = \frac{B\breve{D} - A\breve{C}}{2}.$$

Təpəsi çevrə daxilində olan bucaq

Xassə 4. *Kəsişən iki vətər arasındakı qarşılıqlı bucaqların qiyməti bu bucaqların gərdiyi uyğun qövslərin cəminin yarısına bərabərdir:*



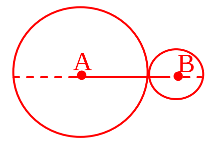
$$\alpha = \frac{A\breve{B} + C\breve{D}}{2}, \beta = \frac{B\breve{C} + AD}{2}.$$

İsbatı. $\alpha = \angle A + \angle BDA = \frac{C\breve{D}}{2} + \frac{A\breve{B}}{2} = \frac{C\breve{D} + A\breve{B}}{2}$;

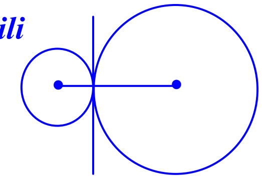
$$\beta = \angle C + \angle CDB = \frac{A\breve{D}}{2} + \frac{B\breve{C}}{2} = \frac{A\breve{D} + B\breve{C}}{2}.$$

§ 17. Çevrələrin qarşılıqlı vəziyyəti

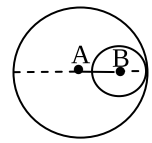
1. *Çevrələrin mərkəzləri və toxunma nöqtəsi bir düz xətt üzərindədir.*



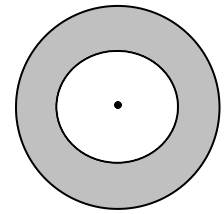
3. Toxunan çevrələrin daxili toxunanı mərkəzləri birləşdirən parçaya perpendikulyardır.

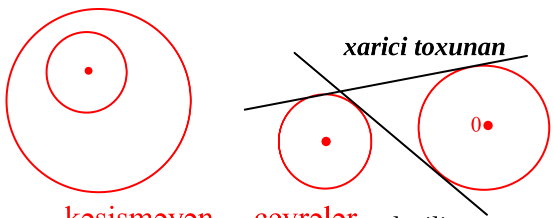


2.Çevrələr xaricdən toxunduqda mərkəzlər arasındakı məsafə ***radiuslar cəminə (AB = R +r),*** *daxildən toxunduqda isə* ***radiuslar fərqinə bərabərdir (AB = R – r).***

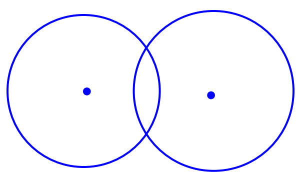


4. Mərkəzləri üst-üstə düşən müxtəlif radiuslu dairələrin **çevrələri arasındakı hissə** **halqa** adlanır.





kəsişməyən çevrələr



kəsişən çevrələr(dairələr)

☺ *Halqanın qalınlığı* **...** **.**

☺ Çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafə radiuslar cəmindən **...** olduqda çevrələr kəsişir.

☺ Çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafə radiuslar **...** olduqda çevrələr kəsişmir.

☺ Çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafə radiuslar **...** olduqda çevrələr xaricdən toxunur.

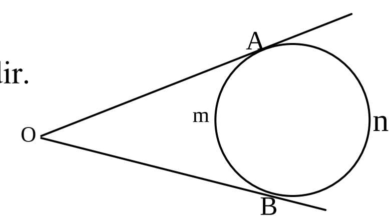
☺ Çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafə radiuslar **...** olduqda çevrələr daxildən toxunur.

☺ Çevrələrin mərkəzlərindən keçən d/x bu iki çevrənin əmələ gətirdiyi fiqurun **...** .

☻ ... çevrələrin ortaq **...** toxunanları yoxdur.

Çalışma nümunələri

1. Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə iki toxunan çəkilmişdir. Toxunma nöqtələri çevrəni 2 **:** 3 nisbətində bölür.Toxunanlar arasındakı bucaq neçə dərəcədir?

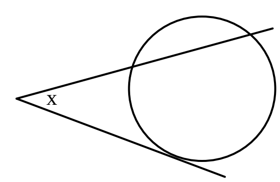


Həlli.Şərtə görə $A\breve{n}B = 3x, A\breve{m}B = 2x \to 3x + 2x = 360^o \to$

$\to 5x = 360^o \to x = 72^o \to A\breve{n}B = 216°, A\breve{m}B = 144°$;

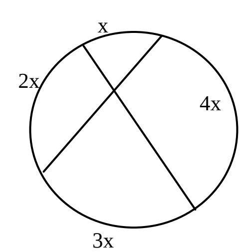
$\angle O = \dfrac{A\breve{n}B - A\breve{m}B}{2} = 36^o$. **Cavab: 36º**

2. Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə toxunan və kəsən çəkilmişdir. Çevrənin bucaq daxilindəki qövsləri 55º və 135º-dir.Toxunan və kəsən arasındakı bucaq neçə dərəcədir?



Həlli. $x = \dfrac{135° - 55°}{2} = 40^o$. **Cavab:** 40º

3. Kəsişən iki vətərin uc nöqtələri çevrəni 1:2:3:4 nisbətində bölür. Vətərlər arasındakı bucaq neçə dərəcədir?



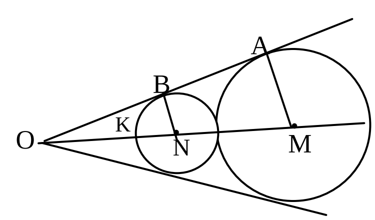
Həlli. Mütənasiblik əmsalını x ilə işarə edək.Onda x+2x+3x+4x = 360º,

10x = 360º, x = 36º.Vətərlər arasındakı bucaq $\dfrac{x + 3x}{2} = 2x = \mathbf{72^o}$.

4.Çevrələrinin uzunluqları 8π sm və 6π sm olan halqanın qalınlığını tapın.

Həlli. $2\pi R = 8\pi$; $2\pi r = 6\pi \Rightarrow R - r = 4 - 3 = 1$ **. Cavab:** 1 sm

5. Radiusları 5 sm və 8 sm olan iki çevrənin xarici toxunanlarının kəsişmə nöqtəsinin kiçik çevrəyə qədər məsafəsini tapın.



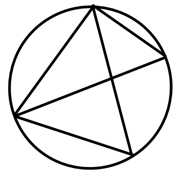
Həlli.OBN və OAM düzbucaqlı üçbucaqlarından (OK= x)

$\sin \angle AOM = \dfrac{BN}{ON} = \dfrac{AM}{OM} = \dfrac{5}{x+5} = \dfrac{8}{x+18}$ olduğu üçün

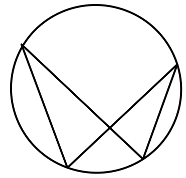
$5(x + 18) = 8(x + 5) \to 5x+90 = 8x + 40 \to 3x = 50 \to x = 16\dfrac{2}{3}$.

§18. Çalışmalar

1.Şəkildə açıq bucaqdan fərqli neçə bərabər bucaqlar cütü var?
A) 2 B)3 C)4 D) 5 E)6

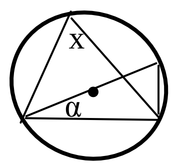


3.Şəkildə neçə daxilə çəkilmiş bucaq var?
A) 1 B)2 C)3 D) 4 E)5

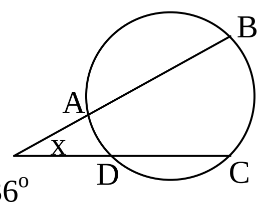


5.Şəkildə $\alpha = 30^o$,x bucağını tapın.

A) 80^o B)60^o C)75 D) 90^o E)45^o

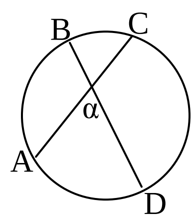


7. A , B , C , D nöqtələri çevrəni A-dan başlayaraq 4:3:2:1 nisbətində bölür. x bucağını tapın



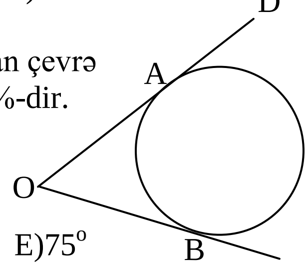
A) 42^o B)48^o C)24^o D) 30^o E)36^o

9. AB,BC,CD və AD qövslərinin nisbəti 4 **:** 2 **:** 6 **:** 3 kimidir. α bucağını tapın.



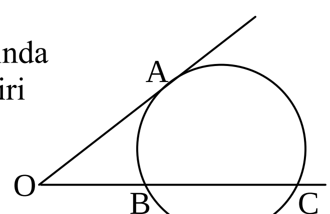
A) 40^o B)50^o C)60^o D) 70^o E)36^o

11. Toxunanlar arasında qalan çevrə qövslərdən biri digərinin 44%-dir. O bucağını tapın.



A) 50^o B)60^o C)70^o D) 80^o E)75^o

13. Toxunan və kəsən arasında qalan çevrə qövslərindən biri digərinin 50%-dir.AB və BC qövsləri bərabərdir. O bucağını tapın.
A) 36^o B)30^o C)40^o D) 45^o E)50^o



15. Toxunan və kəsən arasında qalan çevrə qövslərdən biri digərinin $33\frac{1}{3}$%-dir.Xaricdə qalan qövs isə 40^o-dir. Toxunan və kəsən arasındakı bucağı tapın.
A) 90^o B)80^o C)70^o D) 60^o E)50^o

17. Sahəsi 4π sm^2 olan dairənin çevrəsinin uzunluğu neçə sm-dir?
A) 4π B)6 π C) 8π D) π E) 2π

2.Şəkildə neçə daxilə çəkilmiş bucaq var?
A) 5 B)6 C)7 D) 8 E)4

4.Şəkildə açıq bucaqdan fərqli neçə bərabər bucaqlar cütü var?
A) 2 B)3 C)4 D) 5 E)6

6. Şəkildə $\alpha = 40^o$,x bucağını tapın.

A) 50^o B)60^o C)75 D) 90^o E)45^o

8. A , B , C , D nöqtələri çevrəni A-dan başlayaraq 2:3:4:6 nisbətində bölür. x bucağını tapın

A) 12^o B)24^o C)36^o D) 30^o E)32^o

10. AB,BC,CD və AD qövslərinin nisbəti 5 **:** 3 **:** 7 **:** 3 kimidir. α bucağını tapın.

A) 50^o B)60^o C)7 0^o D) 80^o E)36^o

12. Toxunanlar arasında qalan çevrə qövslərdən biri digərinin $\frac{5}{13}$ hissəsidir. O bucağını tapın.

A) 50^o B)60^o C)70^o D) 80^o E)75^o

14. Toxunan və kəsən arasında qalan çevrə qövslərdən biri digərinin $\frac{2}{5}$ hissəsidir.AC və BC qövsləri bərabərdir.O bucağını tapın.
A) 32^o B)36^o C)40^o D) 45^o E)50^o

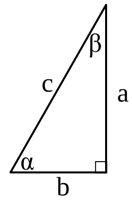
16. Toxunan və kəsən arasında qalan çevrə qövslərindən biri digərinin $\frac{3}{7}$ hissəsidir. Xaricdə qalan qövs isə 30^o-dir.Toxunan və kəsən arasındakı bucağı tapın.
A) 60^o B)66^o C)70^o D) 76^o E)50^o

18. Çevrəsinin uzunluğu 6π sm olan dairənin sahəsi neçə sm^2-dır?
A) 4π B)6 π C) 8π D) 9π E) 36π

§ 19. Düzbucaqlı üçbucaq

Tərif: **Düzbucaqlı Δ-da:**

a) iti bucaq qarşısındakı katetin hipotenuza nisbətinə bu bucağın sinusu deyilir:



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$.

b) iti bucağa bitişik katetin hipotenuza nisbətinə bu bucağın kosinusu deyilir:

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$;

c) iti bucaq qarşısındakı katetin bitişik katetə nisbətinə bu bucağın tangensi deyilir:

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a}$;

d) iti bucağa bitişik katetin qarşısındakı katetə nisbətinə bu bucağın kotangensi deyilir:

$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$; $\mathrm{ctg}\beta = \frac{a}{b}$.

İti bucağın triq. funksiyalarının xassələri

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; **2.** $1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

3. $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$; **4.** $\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$;

5. $\sin\alpha = \cos(90^o - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90^o - \alpha)$,
$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{crg}(90^o - \alpha)$, $\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{tg}(90^o - \alpha)$.

İsbatı.

1 -ci : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{c^2}{c^2} = 1$.

2 -ci 1-ci bərabərliyin hər bir həddini $\cos^2\alpha$-ya bölməklə alınır.

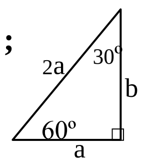
3 -cü 1-ci bərabərliyin hər bir həddini $\sin^2\alpha$ -ya bölməklə alınır.

4 - cü və 5 -ci təriflərdən alınır.

Ç a l ı ş m a   n ü m u n ə l ə r i

1. sin30º = $\frac{1}{2}$, çünki **sinα = a:(2a)** = $\frac{1}{2}$;

$b^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2 \rightarrow b = a\sqrt{3}$.



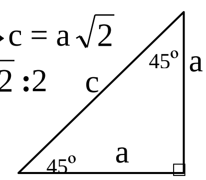
2. sin60º = b:(2a) = $a\sqrt{3}$ **:** $(2a) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Eyni qayda ilə

cos30º $= \frac{\sqrt{3}}{2}$, **cos60º** $= \frac{1}{2}$,**tg30º** $= \frac{\sqrt{3}}{3}$,

tg60º $= \sqrt{3}$, **ctg30º** $= \sqrt{3}$, **ctg60º** $= \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Şəklə əsasən $c^2 = 2a^2 \rightarrow c = a\sqrt{2}$



sin45º = a:**c** = a: ($\sqrt{2}$ a) = $\sqrt{2}$ **:**2

cos45º = sin45º = $\sqrt{2}$ **:** 2 ,

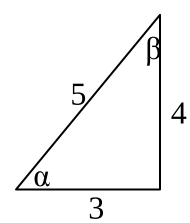
tg45º = ctg45º = a:a = 1.

☺ ***...*** *düzbucaqlı üçbucağın katetləri bərabər ,hər bir iti bucağı isə* ***...*** *dərəcədir.*

☺ *Tərəfləri a , a*$\sqrt{3}$, 2a olan üçbucaq **...** və *onun bucaqları* ***...*** *dərəcədir.*

☺ *Düzbucaqlı üçbucaqda* ***30º-li*** *bucaq qarşısındakı* ***kate****t hipotenuzun* ***...*** *bərabərdir.*

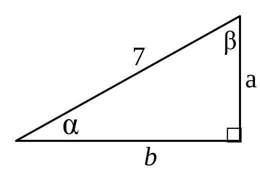
4. Şəkildə verilənlərə görə iti bucaqların triqonometrik funksiyalarının qiymətlərini tapın.



Həlli. $3^2 + 4^2 = 5^2$ olduğu bu üçbucaq düzbucaqlı Δ-dır.Onda

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{3}{4}$;

5. Hipotenuzu 7 sm olan düzbucaqlı Δ-da $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ olduğunu bilərək katetləri və iti bucaqların digər triqonometrik funksiyalarını tapın.



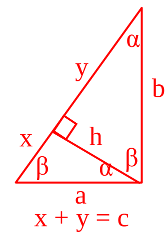
Həlli. $a = c\sin\alpha = 7\sin\alpha = 7\cdot\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$; $\cos\beta = \sin\alpha = \frac{2}{3}$;

cosα $= \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; ***b*** $= 7\cos\alpha = \frac{7\sqrt{5}}{3}$;

tgα $= \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; **ctgα** $= \frac{\sqrt{5}}{2}$.

§ 20. Düzbucaqlı üçbucağın əsas xassələri

Katetləri a və b , hipotenuzu c , iti bucaqları isə uyğun olaraq α , β olan düzbucaqlı Δ nəzərdən keçirək. a və b katetlərinin hipotenuz üzərindəki **proyeksiyalarını** uyğun olaraq x və y ilə işarə edək.Onda:



1. $a^2 + b^2 = c^2$ (Pifaqor teoremi);
2. $h = ab/c$;
3. $h^2 = xy$;
4. $a^2 = xc$;
5. $b^2 = yc$.

İsbatı

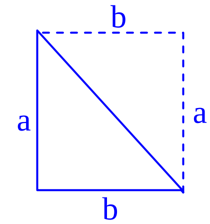
$tg\,\alpha = h:y = x:h \rightarrow$ $\mathbf{h^2 = xy}$

$sin\,\alpha = a:c = x:a \rightarrow$ $\mathbf{a^2 = cx}$

$\cos\alpha = b:c = y:b = h:a \rightarrow$ $\mathbf{b^2 = cy}$, $\mathbf{h=ab/c}$

$a^2 + b^2 = cx + cy = c(x+y) = c\cdot c = \mathbf{c^2}$.

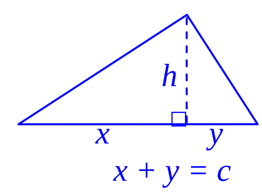
Teorem. ***Düzbucaqlı üçbucağın sahəsi katetlər hasilinin yarısına bərabərdir.***



İsbatı. *Aşağı siniflərdən artıq bilirik ki , düzbucaqlının sahəsi onun **eni və uzunluğu hasilinə** bərabərdir.İxtiyari düzbucaqlı üçbucaq isə **tərəfləri bu Δ-ın katetləri olan bir düzbucaqlının yarısıdır**. Bu mülahizələrə əsasən düzbucaqlı üçbucağın sahəsi katetlər hasilinin yarısına bərabərdir:* $S = \frac{ab}{2}$.

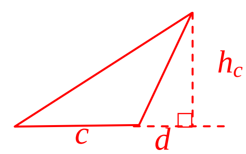
Nəticə1. ***Düzbucaqlı üçbucağın sahəsi hipotenuzla bu hipotenuza endirilmis hündürlük hasilinin yarısına bərabərdir.***

$$S = \frac{1}{2}xh + \frac{1}{2}yh = \frac{h}{2}(x+y) = \frac{1}{2}ch$$



Nəticə2.***İstənilən üçbucağın sahəsi oturacaqla bu oturacağa endirilmis hündürlük hasilinin yarısına bərabərdir:***

$\mathbf{S = 0{,}5ah_a = 0{,}5bh_b = 0{,}5ch_c}$



İsbatı. Kor bucaqlı üçbucaq üçün $S = \frac{1}{2}(c+d)h_c - \frac{1}{2}dh_c = 0{,}5ch_c$.

*İtibucaqlı Δ halında isbat **1-ci nəticədəki** kimi aparılır.*

Qeyd 1.***İti bucaqların***:

a) *sinusları bərabərdirsə özləri də bərabərdir:* **sinα = sin*β* ⇔ α = *β*;**
b) *kosinusları bərabərdirsə özləri də bərabərdir:* **cosα = cos*β* ⇔ α = *β*;**
c) *tangensləri bərabərdirsə özləri də bərabərdir:* **tgα = tg*β* ⇔ α = *β*;**
d) *kotangensləri bərabərdirsə özləri də bərabərdir:* **ctgα = ctg*β* ⇔ α = *β*.**

☺ *X a s s ə l ə r i s ö z l ə i f a d ə e d i n*
1. ... kvadratları cəmi ... kvadratına bərabərdir (...);
2. ... üçbucaqda ... bucaq təpəsindən ... çəkilmiş hündürlük ...nisbətinə bərabərdir;
3. ... Δ-da düz bucaq təpəsindən ... çəkilmiş hündürlüyün kvadratı ... bərabərdir;
4-5. Katetin kvadratı onun hipotenuz üzərindəki ... bərabərdir;

Qeyd 2.***Yuxarıdakı mülahizələrin tərsi də doğrudur,yəni hər hansı bir üçbucaqda beş xassədən biri doğrudursa,onda bu üçbucaq düzbucaqlı üçbucaqdır.***

☹ ***Bu qeydin isbatını özüm edərəm !!***

§ 21 Çalışmalar

1. Katetləri 3 sm və 4 sm olan düzbucaqlı Δ-ın böyük iti bucağının sinusunu tapın.
A) 0,75 B) 0,4 C) 0,5 D) 0,6 E) 0,8

2. Katetlərdən biri 15 sm, hipotenuzu 25 sm olan düzbucaqlı Δ-ın böyük iti bucağının sin-nu tapın.
A) 0,8 B) 0,6 C) 0,5 D) 0,75 E) 0,4

3. Katetləri 5 sm və 12 sm olan düzbucaqlı Δ-ın kiçik iti bucağının kosinusunu tapın.
A) $\frac{5}{13}$ B) $\frac{12}{13}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{5}{17}$ E) $\frac{12}{17}$

4. Katetlərdən biri 6 sm və hipotenuzu 10 sm olan düzbucaqlı Δ-ın kiçik iti bucağının cos-nu tapın.
A) 0,8 B) 0,6 C) 0,5 D) 0,75 E) 0,4

5. Katetləri 5 sm və 8 sm olan düzbucaqlı Δ-ın böyük iti bucağının tangensini tapın.

A) 1,6 B) 1,5 C) 1,4 D) 1,75 E) 1,8

6. Katetləri nisbəti 4 **:** 5 olan düzbucaqlı Δ-ın böyük iti bucağının tangensini tapın.
A) 0,8 B) 1,5 C) 1,25 D) 1,75 E) 1,8

7. Katetləri 3 sm və 4 sm olan düzbucaqlı Δ-ın böyük iti bucağının kotangensini tapın.

A) $1\frac{1}{3}$ B) 0,5 C) 0,6 D) 0,75 E) 0,8

8. Katetləri nisbəti 3 **:** 4 olan düzbucaqlı Δ-ın iti bucaqlarının sinusları cəmini tapın.
A) 1,6 B) 1,5 C) 1,4 D) 1,75 E) 1,8

9. Katetləri 6 sm və 9 sm olan düzbucaqlı Δ-da katetlər qarşısındakı bucaqlar uyğun olaraq α və β olarsa $\cos^2\alpha + \sin^2\beta$ cəmini tapın.
A) 1 B) $\frac{6}{13}$ C) $\frac{9}{13}$ D) $\frac{16}{13}$ E) $\frac{18}{13}$

10. Katetlərdən biri 10 sm, perimetri 60 sm olan düzbucaqlı Δ-ın iti bucaqlarının kosinusları cəmini tapın.

A) $1\frac{4}{13}$ B) $1\frac{2}{13}$ C) $1\frac{1}{13}$ D) $1\frac{3}{13}$ E) $1\frac{5}{13}$

11. Katetləri 7 sm və 14 sm olan düzbucaqlı Δ-da kiçik bucaq α olarsa, $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ fərqini tapın.

A) 0,75 B) 0,4 C) 0,5 D) 0,6 E) 0,8

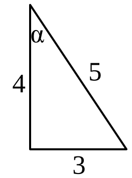
12. Hipotenuzu 20 sm, perimetri 48 sm olan düzbucaqlı Δ-ın iti bucaqlarının tangensləri cəmini tapın.
A) $2\frac{4}{13}$ B) $2\frac{2}{12}$ C) $2\frac{1}{13}$ D) $2\frac{1}{12}$ E) $2\frac{5}{13}$

13. Bərabəryanlı ABC (AB = BC**)** Δ-da ctg∠B = $\frac{3}{4}$**.**

Oturacağa bitişik bucağın tangensini tapın.
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. Bərabəryanlı ABC (AB = BC**)** Δ-da tg∠B = **=** 0,75**.** Oturacağa bitişik bucağın tangensini tapın.
A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

15. Şəkilə əsasən $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha\,\sin^2\alpha$ ifadəsinin qiymətini tapın.

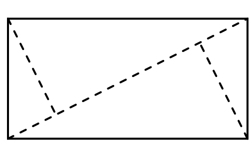


A) 0,25 B) 3,6 C) 2,5 D) 0,36 E) 0,6

16. Şəkilə əsasən $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha\,\sin^2\alpha$ ifadəsinin qiymətini tapın.

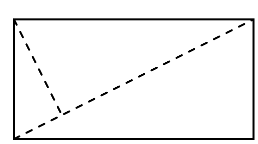
A) $\frac{112}{625}$ B) $\frac{113}{625}$ C) $\frac{114}{625}$ D) $\frac{102}{625}$ E) $\frac{116}{625}$

17. Düzbucaqlının qarşı təpələrindən diaqonala endirilmiş perpendikulyarlar onu 1 **:** 3 **:** 1 nisbətində bölür. Diaqonalın 10 sm olduğunu bilərək perpendikulyarların uzunluğunu tapın.



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

18. Düzbucaqlının təpəsindən diaqonala endirilmiş perpendikulyar onu 1 **:** 4 nisbətində bölür. Perpendikulyarın 10 sm olduğunu bilərək diaqonalın uzunluğunu tapın.

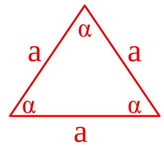


A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

§ 22. Bərabərtərəfli və bərabəryanlı üçbucaqların xassələri

Bərabərtərəfli üçbucaq

Tərif: ***Bütün tərəfləri bərabər olan üçbucağa bərabərtərəfli (düzgün) üçbucaq deyilir.***



1. *Hər bir bucağı 60°-dir;*

2. *Bütün tərəfləri bərabərdir;*

3. *Hər bir təpədən çəkilən median , tənbölən, hündürlük üst-üstə düşür və onların kəsişmə nöqtəsi bu Δ-ın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin **mərkəzidir**,yəni*

$R=\frac{2}{3}m$, $r = \frac{1}{3}m$; (**m**-*mediandır)*

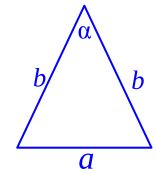
4. $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; $P = 3a$;

burada S - Δ-ın sahəsi, P - perimetrdir.

5. *Üç simmetriya oxu vardır.*

Bərabəryanlı üçbucaq

Tərif: ***İki tərəfi bərabər olan üçbucağa bərabəryanlı üçbucaq deyilir.***

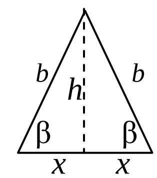


Bərabər tərəflər **yan tərəflər (*b*)**,yan tərəflər arasındakı bucaq **təpə bucağı**(α) və təpə bucağı qarşısındakı tərəf isə **oturacaq (*a*)** adlanır.

Xassələri

1. *Oturacağa **bitişik bucaqlar** bərabərdir;*

2. *Təpədən çəkilmiş hündürlük həm **median**, həm də **tənbölən**dir;*



3. *Təpədən çəkilmiş hündürlüyü öz üzərində saxlayan d/x onun **simmetriya oxudur;***

4. *Yalnız bir simmetriya oxu var;*

5.Oturacaqdakı təpədən çəkilmiş:

a) tənbölənlər bərabərdir; b)medianlar bərabərdir; c) hündürlüklər bərabərdir;

6. $h^2 + x^2 = b^2$ (☺ **...** teoreminə görə**).**

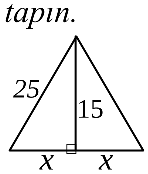
7. $S = hx$; $P = 2b + 2x$, *x-oturacağın yarısıdır.*

Ç a l ı ş m a n ü m u n ə l ə r

1.*Bucaqları 2:4:6 nisbətində olan üçbucağın növünü təyin edin.*

Həlli.Mütənasiblik əmsalını *k* ilə işarə edək. Onda Δ-ın bucaqları 2*k* ; 4*k* və 6*k* olacaqdır. Aydındır ki, $2k + 4k + 6k = 180° \Rightarrow 2k = 180° \Rightarrow k = 15°$.Deməli, bu Δ-ın bucaqları 30° , 60°, 90°-dir.**Cavab:** düzbucaqlı Δ .

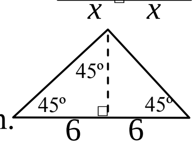
2.*Yan tərəfi 25 sm,hündürlüyü15 sm olan bərabəryanlı üçbucağın oturacağını tapın.*



Həlli. Pifaqor teoreminə görə $x^2 = 25^2 - 15^2 = 400$, $x = 20$.

Cavab: 40 sm .

3.Oturacağı 12 sm,təpə bucağı 90° olan bərabəryanlı Δ-ın oturacağa çəkilmiş hündürlüyünü tapın.



Şəkildən aydındır ki, h = 6 sm.

4.Düzbucaqlı Δ-ın iti bucaqlar nisbəti 4:6 kimidir.İti bucaqlar fərqini tapın.

Həlli. $4k + 6k = 90° \Rightarrow k = 10°$, $6k - 4k = 2k = 20°$.**Cavab:** 20°.

5.Bərabəryanlı ABC (AB = BC) Δ-da $\text{tg}\angle B = \frac{5}{12}$.

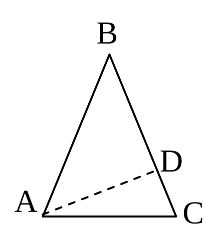
Oturacağa bitişik bucağın tangensini tapın.

Həlli. BC tərəfinə AD perpendikulyarını çəkək.

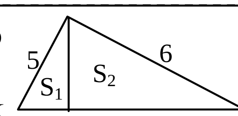
Şərtə görə AD**:**BD = 5**:**12 → AD = 5*k* , BD = 12*k*.

Pifaqor teoreminə görə AB = 13*k* → CD = 13*k* -12*k* = *k***.**

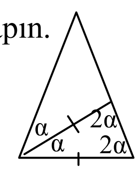
Cavab: $\text{tg}\angle C = AD:DC = 12k : k = 12$.



Çalışmalar.1) Katetləri 5 sm və 6 sm olan düzbucaqlı üçbucağın düz bucaq təpəsindən hündürlük çəkilmişdir. $S_1 : S_2$ sahələr nisbətini tapın.



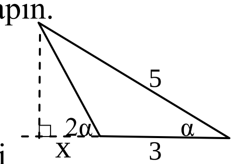
2)Bərabəryanlı üçbucağın oturacağı ona bitişik bucağın tənböləninə bərabərdir.Təpə bucağını tapın.



Həlli. Şəkilə əsasən $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow 5\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 36°$.

3) Bərabəryanlı üçbucağın oturacağı 20 sm, bu tərəfə çəkilmiş hündürlük 15 sm-dir. Yan tərəfə çəkilmiş hündürlüyü tapın.

4)Şəkilə əsasən *x*-i tapın.



5) Bərabərtərəfli üçbucağın sahəsi $\frac{\sqrt{3}}{4}$-dür.Onun hündürlüyünü tapın**.**

6) Bərabəryanlı üçbucağın təpədəki xarici bucağı 120°, oturacağı $2\sqrt{3}$ sm-dir.Onun sahəsini tapın.

7) Tərəfləri 2 sm , 2 sm və 4sm olan üçbucağın növünü təyin edin.

§ 23. Çalışmalar

1. *Perimetri 51 sm olan bərabərtərəfli Δ-ın tənböləni neçə sm-dir.*
A) 17 B) $7{,}5\sqrt{2}$ C) $8{,}5\sqrt{3}$ D) $1{,}5\sqrt{3}$ E) $0{,}5\sqrt{3}$

2. *Perimetri 32 sm olan bərabəryanlı Δ-ın oturacağı 12 sm-dir. Yan tərəfə çəkilmiş hündürlük neçə sm-dir.*
A) 4,8 B) 7,5 C) 9,6 D) 6 E) 8

3. *Sahəsi $4\sqrt{3}$ sm^2 olan bərabərtərəfli Δ-ın perimetri neçə sm-dir?*
A) 12 B) $5\sqrt{2}$ C) 15 D) $5\sqrt{3}$ E) 9

4. *Bərabərtərəfli üçbucağın neçə simmetriya oxu vardır?*
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) yoxdur

5. *Bərabəryanlı üçbucağın neçə simmetriya oxu vardır?*
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) yoxdur

6. *Uzunluğu 57 sm olan məftil parçasından oturacağı 19 sm olan bərabəryanlı üçbucaq düzəltdilər. Yan tərəfə çəkilmiş tənbölən neçə sm-dir?*
A) 19 B) $9{,}5\sqrt{2}$ C) $9{,}5\sqrt{3}$ D) $4{,}5\sqrt{3}$ E) $8{,}5\sqrt{3}$

7. *Bərabəryanlı üçbucağın yan tərəflərindən birinə çəkilmiş medianı onun perimetrini 6 sm və 10 sm-lik hissələrə bölür. Oturacaq neçə sm-dir?*
A) $1\frac{2}{3}$ B) 8 C) 4 D) $3\frac{2}{3}$ E) $2\frac{2}{3}$

8. *Perimetri 14 sm üçbucağın medianı onu perimetrləri 8 sm və12 sm iki üçbucağa ayırır. Median neçə sm-dir?*
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 5

9. ABC üçbucağının (AB≠BC) B təpəsindən çəkilən median bu üçbucağı iki bərabəryanlı üçbucağa ayırır. ABC bucağını tapın.
A) 60^o B) 75^o C) 90^o D) 120^o E) 150^o

10. ABC üçbucağının (AB≠BC) B təpəsindən çəkilən tənböləni bu üçbucağı iki bərabəryanlı üçbucağa ayırır. ABC üçbucağının kiçik bucağını tapın.
A) 36^o B) 42^o C) 45^o D) 60^o E) 72^o

11. *Perimetri 57 sm olan bərabərtərəfli Δ-ın medianı neçə sm-dir.*
A) 7 B) $7{,}5\sqrt{2}$ C) $8{,}5\sqrt{3}$ D) $9{,}5\sqrt{3}$ E) $10{,}5\sqrt{3}$

12. *Perimetri 36 sm olan bərabəryanlı Δ-ın oturacağı 12 sm-dir. Yan tərəfə çəkilmiş tənbölən neçə sm-dir.*
A) 6 B) $5\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{3}$ D) $5\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

13. *Sahəsi $9\sqrt{3}$ sm^2 olan bərabərtərəfli Δ-ın perimetri neçə sm-dir?*
A) 18 B) $15\sqrt{2}$ C) 15 D) $24\sqrt{3}$ E) 279

14. *Bərabərtərəfli üçbucağın neçə simmetriya mərkəzi vardır?*
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) yoxdur

15. *Bərabəryanlı üçbucağın neçə simmetriya mərkəzi vardır?*
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) yoxdur

16. *Uzunluğu 39 sm olan məftil parçasından oturacağı 13 sm olan bərabəryanlı üçbucaq düzəltdilər. Yan tərəfə çəkilmiş median neçə santimetrdir?*
A) 13 B) $4{,}5\sqrt{2}$ C) $5{,}5\sqrt{3}$ D) $4{,}5\sqrt{3}$ E) $6{,}5\sqrt{3}$

17. *Bərabəryanlı üçbucağın yan tərəflərindən birinə çəkilmiş medianı onun perimetrini 12 sm və 21 sm-lik hissələrə bölür. Oturacaq neçə sm-dir?*
A) 5 B) 8 C) 14 D) 17 E) 7

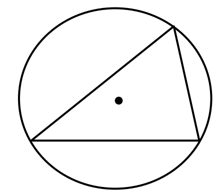
18. *Perimetri 24 sm üçbucağın medianı onu perimetrləri 18 sm və14 sm iki üçbucağa ayırır. Median neçə sm-dir?*
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 5

19. ABC üçbucağının B təpəsindən çəkilən hündürlüyü bu üçbucağı iki bərabəryanlı üçbucağa ayırır. A bucağını tapın.
A) 45^o B) 30^o C) 90^o D) 60^o E) 15^o

20. Bərabəryanlı üçbucağın təpəsindəki xarici bucağı qonşu daxili bucaqdan beş dəfə böyük - dür. Oturacağa bitişik bucağı tapın.
A) 30^o B) 45^o C) 60^o D) 75^o E) 80^o

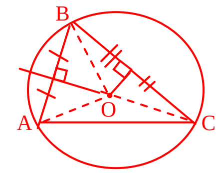
§ 24. Üçbucaq daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələr

1.Üçbucaq xaricinə çəkilmiş çevrə



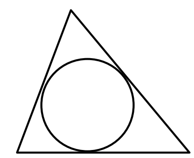
Tərif**:** ***Üçbucağın üç təpəsindən keçən çevrəyə üçbucaq xaricinə çəkilmiş çevrə deyilir.***

Teorem. ***İstənilən üçbucağın xaricinə çevrə çəkmək olar və bu çevrənin mərkəzi tərəflərin orta perpendikulyarlarının kəsişmə nöqtəsi,radiusu isə bu nöqtə ilə hər hansı təpəni birləşdirən parçadır.***



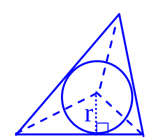
İsbatı. Parçanın o*rta perpendikulyarlarının* xassəsinə görə tərəflərin ***orta perpendikulyarlarının*** kəsişmə nöqtəsi təpələrdən bərabər məsafədədir**:** AO = OB = OC. Ona görə də , O nöqtəsini mərkəz, AO parçasını isə **radius (R)** qəbul edib çevrə çəksək, bu çevrə A , B və C nöqtələrindən keçəcəkdir.Tərifə görə bu çevrə ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrədir. Üçbucaq xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu əsasən $S = \frac{abc}{4R}$ (bax sahə düsturlarına) düsturu və yaxud sinuslar teoremindən tapılır.

2.Üçbucaq daxinə çəkilmiş çevrə



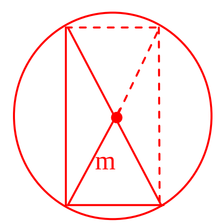
Tərif**:*****Üçbucağın üç tərəfinə daxildən toxunan çevrəyə üçbucaq daxilinə çəkilmiş çevrə deyilir.***

Teorem. ***İstənilən üçbucağın daxilinə çevrə çəkmək olar və bu çevrənin mərkəzi tənbölənlərin kəsişmə nöqtəsi,radiusu(r) isə kəsişmə nöqtəsindən tərəfə endirilən perpendikulyardır.***

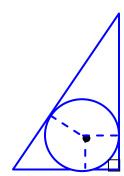


İsbatı. Toxunanın əsas xassəsinə görə tənbölənlərin kəsişmə nöqtəsi üçbucağı tərəflərindən bərabər məsafədədir.Ona görə də, tənbölənlərin kəsişmə nöqtəsini mərkəz, bu nöqtədən tərəfə endirilmiş perpendikulyarı isə **radius(r)** qəbul edib çevrə çəksək,onda bu çevrə üç tərəfə toxunacaqdır ki, o da daxilə çəkilmiş çevrədir.Üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin ***radiusu*** əsasən S = pr (*bax sahə düsturlarına*) düsturundan tapılır.

Nəticə1.***Düzbucaqlı Δ-ın xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi hipotenuzun orta nöqtəsi, radiusu isə düz bucaq təpəsindən çəkilmiş mediana bərabərdir: R = m = c : 2***
(c – hipotenuzun uzunluğudur)

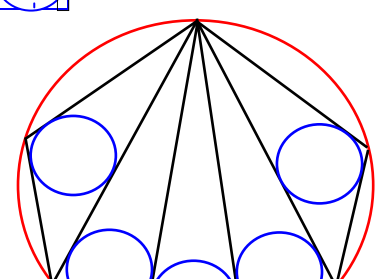


Bu xassənin isbatı şəkildən aydındır.



Nəticə2***. Düzbucaqlı Δ-ın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu katetlərinin cəmi ilə hipotenuzun fərqinin yarısına bərabərdir:***
r = (a + b - c):2.

Bu xassənin isbatı toxunanın 2-ci xassəsindən alınır.



Qeyd. Üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafəni x ilə işarə etsək , onda

$$x^2 = R^2 - 2Rr\text{ , (}R\text{ , }r\text{ - radiuslardır).}$$

Çalışma.Tərəfləri $\sqrt{5}$ sm, 2 sm və 3 sm olan üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusunu tapın.

Həlli. $(\sqrt{5})^2 + 2^2 = 3^2$ olduğu üçün bu üçbucaq düzbucaqlı Δ-dır.

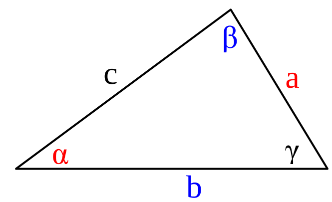
Ona görə də, ***R = c : 2 =3:2 = 1,5(sm), r =*** $\frac{2+\sqrt{5}-3}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

§ 25. İxtiyari üçbucaqda triqonometrik funksiyalar.

Həndəsədə triqonometrik funksiyaların düzbucaqlı üçbucaqdakı tərifləri ilə artıq tanışıq. Bu təriflər yalnız iti bucaqların triqonometrik funksiyalarını təyin edir.Lakin ixtiyari üçbucağın tərəf və bucaqları arasındakı münasibətləri ətraflı öyrənmək üçün düzbucaqlı üçbucaqdakı təriflər kifayət etmir.Ona görə də ,**ixtiyari üçbucağın hər bir bucağının triqonometrik funksiyalarını müəyyən edən** və **əvvəlki təriflərlə ziddiyyət təşkil etməyən** tərifin verilməsinə ehtiyac vardır.

Onu da qeyd edək ki,müxtəlif təriflər mövcud olsa da,yeni tərifin üçbucağa məxsus anlayışlar dilində verilməsini daha məqsədəuyğun hesab edirik.Beləliklə, triqonometrik funksiyaların yeni təriflərini aşağıdakı şəkildə veririk.

Tərif: İstənilən üçbucaqda bucaq qarşısındakı tərəfin bu üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin diametrinə nisbətinə həmin **bucağın sinusu** deyilir:



$$\sin\alpha = \frac{a}{2R},\ \sin\beta = \frac{b}{2R},\ \sin\gamma = \frac{c}{2R}$$

İstənilən üçbucaqda **bucağın kosinusu**

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\ \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\ \cos\gamma = \frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}$$

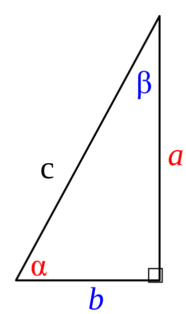
düsturları ,**tangens və kotangens** isə

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \ ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

düsturları ilə təyin edilir, burada a , b , c üçbucağın tərəfləri, α,β,γ uyğun olaraq tərəflər qarşısındakı bucaqlar, R - üçbucaq xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusudur.

İxtiyari üçbucaqda triqonometrik funksiyaların yeni tərifləri üçbucaqların nəzəri cəhətdən öyrənilməsində çox əlverişli olsa da,bu təriflərin köməyi ilə isbat olunan xassələr və ondan çıxan nəticələr *praktik cəhətcə* daha çox tətbiq olunur.Ona görə də , yeni təriflər əsasında isbat olunan bir çox teorem və ondan çıxan nəticələrlə tanış olmağa çalışacağıq.

Xüsusi hal. Düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzu onun xaricinə çəkilmiş çevrənin diametri olduğu üçün



$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} = \frac{a}{c}\ ;\sin\beta = \frac{b}{c}\ ;$$

Pifaqor teoreminə görə $c^2 = a^2 + b^2$, onda

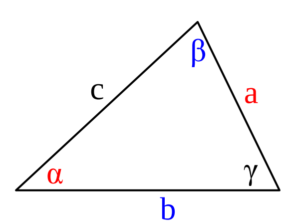
$$\cos\alpha = \frac{c^2+b^2-a^2}{2bc} = \frac{2b^2}{2bc} = \frac{b}{c};\ \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{2a^2}{2ac} = \frac{a}{c};$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b};\quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}.$$

Deməli, ***düzbucaqlı üçbucaqda yeni təriflər triqonometrik funksiyaların klassik tərifləri ilə eynidir.***

Bu təriflərdən bilavasitə aşağıdakı ***məşhur teoremlər*** alınır.

Sinuslar teoremi. ***İstənilən üçbucaqda tərəflərin öz qarşılarındakı bucaqların sinuslarına nisbəti sabitdir və bu sabit ədəd üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin diametrinə (2R) bərabərdir,yəni***



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \mathbf{2R}\ .$$

Kosinuslar teoremi. ***İstənilən üçbucaqda aşağıdakılar doğrudur:***

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\ ;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\ ;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

burada a , b, c tərəflər, α,β,γ ***- tərəflər qarşısındakı uyğun bucaqlardır.***

§ 26. Çalışmalar

1. Tərəfləri 2 sm , 3 sm və 4 sm olan üçbucaqda böyük bucağın kosinusunu tapın.

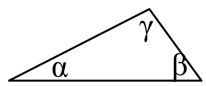
3. Tərəfləri 3 sm , 4 sm və 5 sm olan üçbucaqda böyük bucağın sinusunu tapın.

5. Xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu 5 sm ,tərəflərindən biri isə 8 sm olan üçbucaqda bu tərəf qarşısındakı bucağın sinusunu tapın.

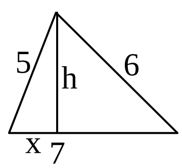
7. Üçbucağın iki tərəfi $4\sqrt{3}$ sm və 10 sm ,bu tərəflər qarşısındakı bucaqların kosinusları uyğun olaraq 0,8 və 0,5-dir. Üçüncü tərəfin uzunluğunu tapın.

9. Üçbucağın bir tərəfi 9 sm , bu tərəf qarşısındakı bucağın kosinusu 0,6-dır.Xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

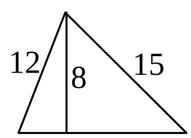
11. Şəkildə $\cos\alpha = 0{,}72$, $\cos\beta = 0{,}8$ olduğunu bilərək γ bucağının növünü təyin edin.



13. Tərəfləri 5 sm , 6 sm və 7 sm olan üçbucaqda kiçik tərəfin böyük tərəf üzərindəki proyeksiyasını(x) tapın.



15. Üçbucağın iki tərəfi 15 sm və 12 sm, üçüncü tərəfə endirilmiş hündürlük 8 sm-dir. Xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.



2. Tərəfləri 5 sm , 6 sm və 7 sm olan üçbucaqda kiçik bucağın kosinusu- nu tapın.

4. Tərəfləri 5 sm , 12 sm və 13 sm olan üçbucaqda kiçik bucağın sinusu- nu tapın.

6 . Xaricinə çəkilmiş çevrənin uzunluğu 16π sm, bucaqlarından biri 60^o olan üçbucaqda bu bucaq qarşısındakı tərəfi tapın.

8. Üçbucağın iki tərəfi 9 sm və 12 sm ,bu tərəflər qarşısındakı bucaqların kosinusları uyğun olaraq 0,75 və 0,85-dir. Üçüncü tərəfin uzunluğunu tapın.

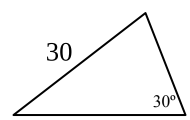
10. Bir tərəfi 9 sm , bu tərəf qarşısındakı bucağın 120^o olduğunu bilərək xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

12.Şəkildə $\cos\alpha = 0{,}2$, $\cos\beta = 0{,}3$ olduğunu bilərək γ bucağının növünü təyin edin.

14.Şəkilə əsasən böyük tərəfə endirilmiş hündürlüyü (h) tapın.

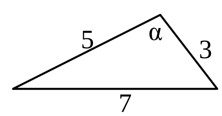
16.Üçbucağın iki tərəfi 17 sm və 10 sm, üçüncü tərəfə endirilmiş hündürlük 8 sm-dir. Daxilə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

17.*Üçbucaqda uzunluğu 30 sm olan tərəfin qarşısındakı bucaq 30^o-dir.Xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.*



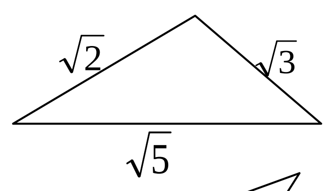
Həlli. Sinuslar teoreminə görə $30:\sin 30^o = 2R \Rightarrow 2R = 60 \Rightarrow$ **R = 30 sm.**

18. *Tərəfləri 3sm , 5sm , 7 sm olan üçbucağın növünü təyin edin və böyük bucağı tapın.*



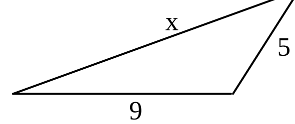
Həllı. $7^2 > 3^2 + 5^2$ olduğu üçün**,** bu üçbucaq **korbucaqlıdır.**cos-lar teoreminə görə $7^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -0{,}5 \Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = 120^o}$.

19.*Tərəfləri* $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ *və* $\sqrt{5}$ *olan üçbucağın sahəsini tapın.*



Həlli. $(\sqrt{5})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2$ olduğu üçün bu üçbucaq düzbucaqlı Δ-dır. Ona görə də, $S = 0{,}5\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 0{,}5\sqrt{6}$.

20. *Şəkildəki korbucaqlı üçbucağın tərəfləri tam ədədlərlə ifadə olunmuşdur.x -in mümkün qiymətlər cəmini tapın.*



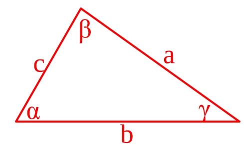
Həlli. Δ *bərabərsizliyinə* görə $4 < x < 14$.Bu üçbucaq korbucaqlı olduğu üçün $11 \le x \le 13$,çünki $x^2 > 9^2 + 5^2$.

Cavab: 11+ 12 +13 = 36

§ 27. Sinuslar və kosinuslar teoremindən çıxan nəticələr

Nəticə 1.**İstənilən Δ-da tərəflərlə qarşı bucaqların sinusları mütənasibdir:**

a : b : c = sinα : sinβ : sinγ



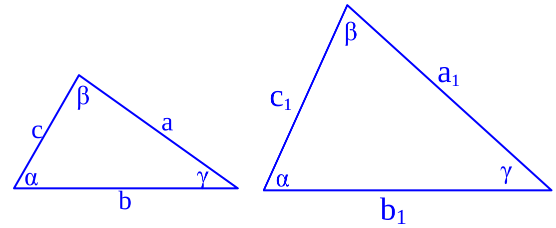
Doğrudan da, sin-lar teoreminə görə a : sinα = b: sinβ = c: sinγ ⇒

⇒ a : b = sinα : sinβ , b : c = sinβ : sinγ ⇒ a : b : c =

= sinα : sinβ : sinγ.

Nəticə 2. Bir üçbucağın iki bucağı digər üçbucağın iki bucağına bərabərdirsə,onda bu üçbucaqların tərəfləri mütənasibdir:

$a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$.



İsbatı. Bu üçbucaqların üçüncü bucaqları da bərabər olduğu üçün

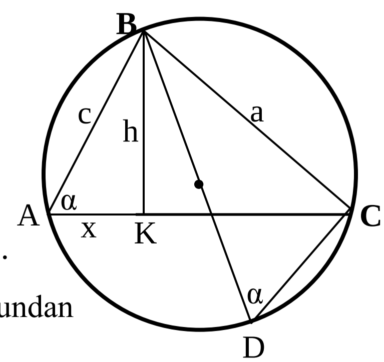
$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a_1 : b_1 : c_1$.

Bu nəticədən alırıq ki, *bir üçbucağın bucaqları digər üçbucağın bucaqlarına bərabərdirsə,onda bu üçbucaqların uyğun tərəfləri nisbəti(k) də bərabərdir:*

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k,$$

burada k ədədi mütənasiblik əmsalı adlanır.

Nəticə 3. *İti bucaq üçün triqonometrik funksiyaların yeni və klassik tərifləri eynigüclüdür.*



İsbatı. Tutaq ki, ABC üçbucağı verilmişdir,α onun iti bucağı, BK hündürlük,BD xaricə çəkilmiş çevrənin diametridir.

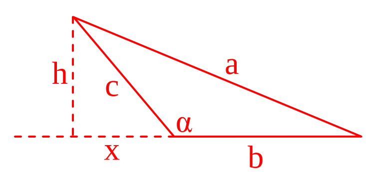
Göstərək ki, $\sin\alpha = \frac{h}{c} = \frac{a}{2R}$, $\cos\alpha = \frac{x}{c} = \frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$,(AC = b).

Şəkilə əsasən ABK və BDC üçbucaqlarının bucaqları bərabər olduğundan onların tərəfləri mütənasibdir, ona görə də ***h : c = a : (2R)*** *= sinα ;*

$$\cos\alpha = \frac{c^2+b^2-a^2}{2bc} = \frac{x^2+h^2+b^2-a^2}{2bc} = \frac{x^2+b^2-(b-x)^2}{2cb} = \frac{2bx}{2bc} = \frac{x}{c}.$$

Nəticə 4. **Kor bucaqdan iti bucağa keçid düsturları:**

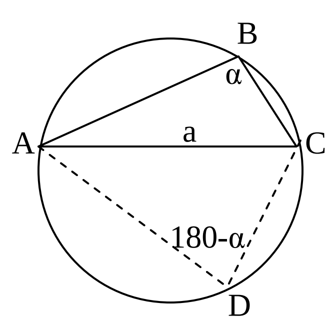
sinα = sin(180-α) , cosα = - cos(180-α)



İsbatı. Şəkilə əsasən $h^2 + x^2 = c^2$, onda

$$\cos\alpha = \frac{c^2+b^2-a^2}{2bc} = \frac{x^2+h^2+b^2-a^2}{2bc} = \frac{x^2+b^2-(b+x)^2}{2cb} =$$

$$= -\frac{2bx}{2bc} = -\frac{x}{c} = -\cos(180-\alpha) \Rightarrow$$ **cosα = - cos(180-α).**



ABC korbucaqlı üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrəni nəzərdən keçirək.B bucağının söykəndiyi qövs üzərində ixtiyari D nöq - təsini qeyd edək.Onda şəkildən aydındır ki,

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} = \sin(180-\alpha).$$

Bu qeydə əsasən *ixtiyari üçbucağın α* bucağı üçün

sin(180-α) = sinα, cos(180-α) = - cosα ,

tg(180-α) = -tgα, ctg(180-α) = - ctgα ,

çevirmə düsturlarını alırıq.

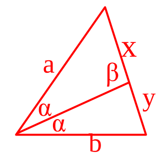
Aydındır ki, kor bucağın sinusu müsbət,digər trig.funksiyaların qiymətləri isə mənfidir.

28. Tənbölənin xassələri

Xatırlatma.***Təpə ilə qarşı tərəfi birləşdirən və təpədəki bucağı yarı bölən d/x parçasına tənbölən deyilir.***

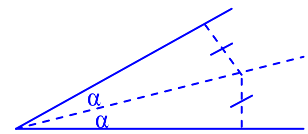
Xassə1.***Tənbölən qarşı tərəfi uyğun olaraq çəkildiyi bucağın tərəfləri nisbətində bölür,yəni***

$\boldsymbol{x : y = a : b}$

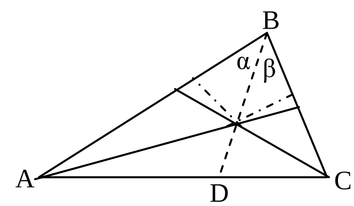


İsbatı. Şəkildən alırıq ki, $x : \sin\alpha = a : \sin\beta$, $y : \sin\alpha = b : \sin(180^{o} - \beta) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ $x : a = \sin\alpha : \sin\beta$, $y : b = \sin\alpha : \sin\beta \Rightarrow$ $x : a = y : b \Rightarrow$ $x : y = a : b$**.**

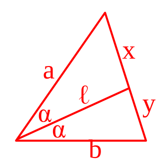
Xassə 2.***Tənbölən üzərində olan istənilən nöqtə çəkildiyi bucağın tərəflərindən bərabər məsafədədir.***



İsbatı.Tənbölənin ixtiyari nöqtəsindən tərəflərə perpendikulyarlar endirək.Onda burada alınan düzbucaqlı üçbucaqlar bərabər olduğundan həmin nöqtədən tərəflərə qədər məsafələr də bərabər olacaqdır.



Xassə 3.***Tənbölənlərin üçü də bir nöqtədə kəsişir.***
İsbatı.A və B bucaqlarının tənbölənlərini çəkək.Bu tənbölənlərin kəsişmə nöqtəsindən keçən BD parçasının tənbölən olduğunu isbat edək,yəni göstərək ki, $\alpha = \beta$.
Kəsişmə nöqtəsindən AB və BC tərəflərinə endirilən perpendikulyarlar bərabər və B təpəsinə bitişik düzbucaqlı üçbucaqlar ortaq hipotenuza malik olduğundan bu üçbucaqlar bərabərdir.Buradan da alırıq ki, $\alpha = \beta$.



Xassə 4. **Tənbölənin kvadratı çəkildiyi bucağın tərəfləri hasili ilə qarşı tərəfdə ayırdığı parçalar hasili fərqinə bərabərdir:**

$\boldsymbol{\ell^{2} = ab - xy}$

İsbatı. Tutaq ki, $a \neq b$**.** Onda şəkildəki üçbucaqlardan alırıq:

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + \ell^2 - x^2}{2a\ell} = \frac{b^2 + \ell^2 - y^2}{2b\ell} \Rightarrow \frac{a^2 + \ell^2 - x^2}{a} = \frac{b^2 + \ell^2 - y^2}{b} \Rightarrow$$

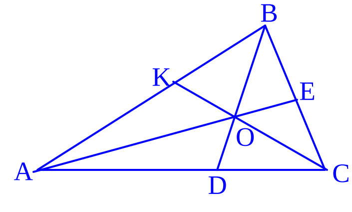
$$\Rightarrow ba^2 + b\ell^2 - bx^2 = ab^2 + a\ell^2 - ay^2 \Rightarrow ba^2 - bx^2 - ab^2 + ay^2 = a\ell^2 - b\ell^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell^2(a - b) = ab(a-b) - b\,x \cdot x + a\,y \cdot y.$$

1-ci xassəyə əsasən bx =ay. Bunu yuxarıda nəzərə alsaq

$$\ell^2(a - b) = ab(a-b) - axy + bxy = ab(a-b) - xy(a - b) \Rightarrow \boldsymbol{\ell^{2} = ab - xy}.$$

5.*Üçbucağın tərəflərini a , b , c, uyğun tərəflərə çəkilmiş tənbölənləri* $\boldsymbol{\ell_a}$, $\boldsymbol{\ell_b}$, $\boldsymbol{\ell_c}$ *ilə işarə etsək,onda hər bir tənbölən kəsişmə nöqtəsində aşağıdakı nisbətdə bölünür:*



$\boldsymbol{\ell_a}$ **üçün OE : AO = $\boldsymbol{a : (b + c)}$;**
$\boldsymbol{\ell_b}$ **üçün OD : BO = $\boldsymbol{b : (a + c)}$;**
$\boldsymbol{\ell_c}$ **üçün OK : OC = $\boldsymbol{c : (a + b)}$.**

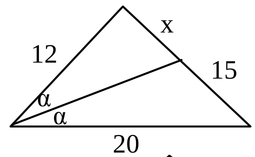
İsbatı. Tutaq ki,ABC üçbucağının tənbölənləri O nöqtəsində kəsişirlər.Onda 1-ci xassəyə görə ℓ_a üçün
OE : AO = EC : AC = BE : AB $\Rightarrow$ AB·EC = AC·BE $\Rightarrow$ c ·EC = b·(a - EC) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow EC = \frac{ab}{b+c} \Rightarrow OE : AO = \frac{a}{b+c};$$

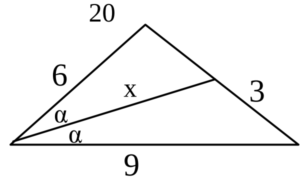
Digər bərabərliklər də eyni qayda ilə isbat olunur.

29.Tənbölənə aid Çalışmalar

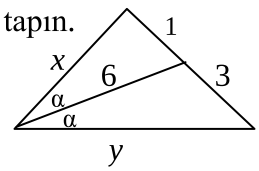
1.Şəkilə əsasən x-i tapın.



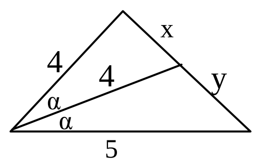
2.Şəkilə əsasən x-i tapın.



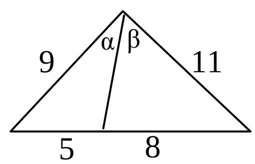
3.Şəkilə əsasən x + y cəmini tapın.



4.Şəkilə əsasən xy hasilini tapın.



5.Şəkilə əsasən hansı münasibətlər doğrudur?
1) α<β ; 2) β<α ; 3) α = β .



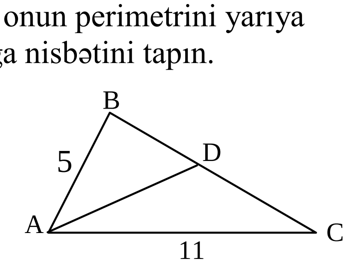
6.Üçbucağın tənböləni onun sahəsini 2**:**3 nisbətində bölür. Tənbölənin çəkildiyi bucağın tərəfləri nisbətini tapın

7.Bərabəryanlı üçbucağın oturacağa bitişik bucağından çəkilmiş tənböləni yan tərəfini 3**:**4 nisbətində bölür. Bu tənbölən təpədən çəkilmiş hündürlüyü hansı nisbətdə bölür? (Müxtəli hallara baxın)

8.Bərabəryanlı üçbucağın oturacağa bitişik bucağından çəkilmiş tənböləni onun sahəsini 4**:**5 nisbətində bölür. Bu tənbölən təpədən çəkilmiş medianı hansı nisbətdə bölür? (Müxtəli hallara baxın)

9.Bərabəryanlı üçbucağın oturacağa bitişik bucağından çəkilmiş tənböləni onun perimetrini yarıya bölür.Yan tərəfin oturacağa nisbətini tapın.

10. ABC üçbucağında AD tənbölən , $\angle DAC = \angle ACD$, AB = 5 sm, AC = 11 sm .S_{ABC} = ?



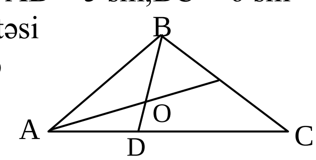
11. Perimetri 21 sm olan üçbucağın tənböləni onu perimetrləri 12 sm və 15 sm olan iki üçbucağa ayırır.Tənbölənin çəkildiyi bucağın tərəfləri nisbətini tapın.
A)1:2 B)2:3 C) 3:4 D) 4:5 E) 3:5

12.Bərabəryanlı üçbucağın oturacağa bitişik bucağından çəkilmiş tənböləni yan tərəfini 6**:**8 nisbətində bölür. Bu tənbölən təpədən çəkilmiş tənböləni hansı nisbətdə bölür?
(Müxtəli hallara baxın)

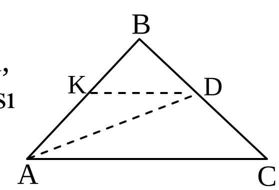
13.Bərabəryanlı üçbucağın oturacağa bitişik bucağından çəkilmiş tənböləni yan tərəfi 5**:**7 nisbətində bölür.Bu tənbölən yan tərəfləri birləşdirən orta xətti hansı nisbətdə bölür?
A)2:1 B) 3:2 C) 4:3 D)5:2 E)5:3

14.Bərabəryanlı üçbucağın oturacağa bitişik bucağından çəkilmiş tənböləni onun perimetrini yarıya bölür.Təpə bucağını tapın.

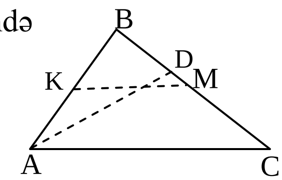
15.ABC üçbucağında AB = 5 sm,BC = 6 sm və AC = 7 sm, O nöqtəsi tənbölənlərin kəsişmə nöqtəsidir.BO**:**OD nisbətini tapın.



16.ABC üçbucağında AB = 5 sm, AC = 7 sm, AD tənbölən,DK parçası AC-yə paraleldir. DK neçə sm-dir.



17.ABC üçbucağın AD tənböləni BC tərəfini 7**:**9 nisbətində bölür.Bu tənbölən KM orta xəttini hansı nisbətdə bölür?



A)6:5 B) 7:5 C)7:3 D)7:2 E)5:3

§30. "Möcüzəli" üçbucaq

Təpə bucağı 36^o olan bərabəryanlı üçbucağın qəribə xassələri vardır. Qəribəliklər əsasən ondan ibarətdir ki,bu Δ-da **"Qızıl qayda"** adlanan bölgülər mövcuddur.Təbiətdə , memarlıq sənətlərində və digər sahələrdə qədim tarixdən məlum olan - **"Qızıl qayda"** kimi tanınan bu qayda parçanın aşağıdakı kimi bölgüsüdür:

Parça iki hissəyə elə bölünür ki , parçanın öz böyük hissə-sinə nisbəti böyük hissənin kiçik hissəyə nisbətinə bərabərdir, yəni uzunluğu a-ya bərabər olan parçanı iki hissəyə böl-dükdə böyük hissəni x işarə etsək, onda

$$\boldsymbol{a : x = x : (a - x).}$$

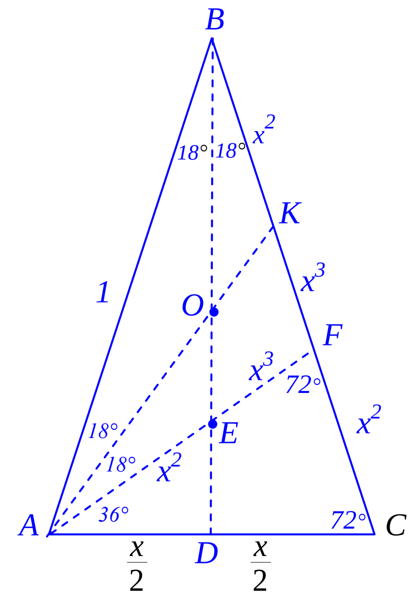
$$\underbrace{x \qquad\qquad a-x}_{a}$$

x : a = k işarə edib alırıq:

$$\boldsymbol{k^2 + k - 1 = 0 \quad \Rightarrow k =} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx \boldsymbol{0{,}62}\,.$$

Əgər a parçasının uzunluğunu vahid qəbul etsək ,onda $x = k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Bu halda: a) $x^2 = 1 - x$; b) $x+1=1 : x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.



Göstərək ki, **yan tərəfi vahid və təpə bucağı 36^o** olan ABC bərabəryanlı üçbucağında aşağıdakı xassələr doğrudur:

Xassə 1. ***Oturacağa bitişik bucağın tənböləni yan tərəfi "Qızıl qayda" ilə bölür.***

İsbatı.AF tənböləninin xassəsinə görə AC : AB = FC : FB ⇒ AC : 1=

$= (1 - FB) : FB \Rightarrow AC : 1 = (1 - AC) : AC \Rightarrow \Rightarrow AC^2 + AC - 1 = 0 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = x$.

Digər tərəfdən AB = BC = 1, AC = AF = BF = x olduğu üçün

$BC : BF = 1 : x$, $BF : FC = x : (1 - x) = x : x^2 = 1 : x \Rightarrow$ **BC : BF = BF : FC.**

Xassə 2. ***Tənbölənlərin kəsişmə nöqtəsi oturacağa bitişik bucaqların tənbölənlərini "Qızıl qayda" ilə bölür.***

İsbatı. BE tənböləninin xassəsinə görə $AE : EF = 1 : x \Rightarrow AE : (x - AE) = 1 : x \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot AE = x - AE \Rightarrow AE = \frac{x}{x+1} = \frac{x^2}{x^2+x} = \mathbf{x^2} \Rightarrow$ **AE : EF = AF : AE .**

Şəkildən aydındır ki, **EF** $= x - x^2 = x\,(1 - x) = x \cdot x^2 = \boldsymbol{x^3}$, **FK = EF =** $\boldsymbol{x^3}$, **BK =AE =** $\boldsymbol{x^2}$.

Asanlıqla almaq olar ki**, AK** $= \sqrt{3-4x}$; **BD** = h = $\frac{\sqrt{3+x}}{2}$.

$\sin 18^o = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 18^o = h:1 = \frac{\sqrt{3+x}}{2}$,

$\cos 36^o = \frac{1^2+1^2-x^2}{2\cdot 1\cdot 1} = \frac{2-(1-x)}{2} = \frac{1+x}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$;

$\sin 36^o = xh = \frac{x\sqrt{3+x}}{2} = \frac{\sqrt{(1-x)(3+x)}}{2} = \frac{\sqrt{2-x}}{2}$.

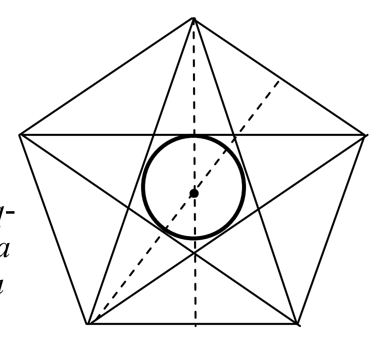
Çalışma 1. Şəkildəki qalan parçaları və digər bucaqla-rın triqonometrik funksiyalarını x -lə ifadə edin.

Çalışma 2. "Möcüzəli" üçbucağın daha hansı xassələ-rini söyləyə bilərsiniz ?

Tapşırıq

1.Bu şəkildə hansı fiqurlar təsvir edilmişdir?

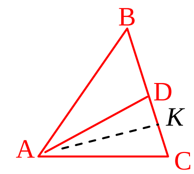
2. Böyük beşbucaq-lının tərəfi x olarsa şəkildəki parçaları x ilə ifadə edin!



(*x - "qızıl bölgü"dəki ədəddir*)

§ 31. Medianın xassələri

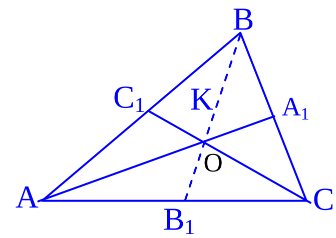
Xassə 1.***Median Δ-ın sahəsini yarıya bölür: S(ABD) = S(BCD)***



İsbatı. A təpəsindən AD medianı və AK hündürlüyünü çəkək.Onda

$S(ABD) = 0{,}5\, AK \cdot BD = 0{,}5\, AK \cdot CD = S(BCD)$

Xassə 2.***Medianların üçü də bir nöqtədə kəsişir və hər bir median kəsişmə nöqtəsində təpədən başlayaraq 2:1 nisbətində bölünür.***



İsbatı. CC_1 və AA_1 medianlarını çəkək.Əvvəlcə göstərək ki, $AO : OA_1 = CO : OC_1 = 2:1$.Doğrudan da ,$C_1A_1 \parallel AC$ olduğundan OA_1C_1 və AOC üçbucaqlarının bucaqları bərabərdir.Ona görə də, sinuslar teoreminə əsasən bu üçbucaqların tərəfləri mütənasibdir**:**

$AO : OA_1 = CO : OC_1 = AC : A_1C_1 = 2 = 2:1.$

Göstərək ki, iki medianın kəsişmə nöqtəsindən keçən BB_1 parçası da mediandır,yəni $AB_1 = B_1C$.Yuxarıdakı mülahizə ilə alırıq ki, $AB_1 : KA_1 = AO : OA_1 = B_1C : KA_1 = 2 \Rightarrow$ $\mathbf{AB_1 = B_1C}$.

Beləliklə,

$\mathbf{AO : OA_1 = CO : OC_1 = BO : OB_1 = 2:1}$

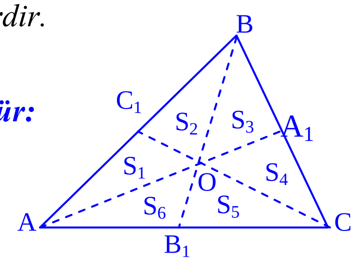
$\mathbf{OA_1 : AA_1 = OC_1 : CC_1 = OB_1 : BB_1 = 1:3}$

Sonuncunu belə də ifadə etmək olar**:**

Medianların üçü də bir nöqtədə kəsişir və hər bir medianın kiçik hissəsi uyğun medianın $\frac{1}{3}$, böyük hissəsi isə $\frac{2}{3}$ hissəsinə bərabərdir.

Xassə 3.***Üç median bu üçbucağı altı bərabər sahəli üçbucaqlara bölür:***

$\boldsymbol{S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = S(ABC):6}$



İsbatı.Şəkildən aydındır ki, OC_1 , OA_1, OB_1 parçaları uyğun olaraq AOB , BOC , AOC üçbucaqlarının medianlarıdır.Buna görə də $S_1 = S_2$, $S_3 = S_4$ **,** $S_5 = S_6$ **.**Digər tərəfdən bərabər sahəli AA_1C və BB_1C üçbucaqları B_1OA_1C ortaq hissəsinə, ABB_1 və ACC_1 üçbucaqları isə AC_1OB_1 ortaq hissəsinə malik olduğundan $S_3 = S_6$, $S_2 = S_5$. Beləliklə,

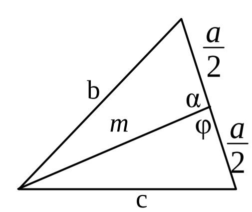
$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \frac{1}{6}\ S(ABC).$$

Xassə 4**.** ***Medianın tərəflərlə ifadəsi*** **:**

$$m_a = 0{,}5\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}\ \textbf{;}\ m_b = 0{,}5\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}\ \textbf{;}\ m_c = 0.5\sqrt{2a^2 + 2b^2 - a^2}\ .$$

İsbatı. Kosinuslar teoreminə görə$(m_a = m)$

$b^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot m \cdot \frac{a}{2}\cos\alpha$, $c^2 = m^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot m \cdot \frac{a}{2}\cos\varphi$.



Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq

$b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2} - ma(\cos\alpha + \cos\varphi)$

alırıq. α və φ qonşu bucaqlar olduğundan $\cos\alpha + \cos\varphi = 0$.

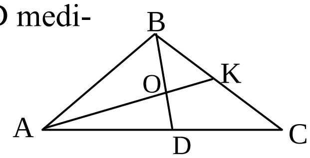
Beləliklə,

$\boldsymbol{2b^2 + 2c^2 = 4m^2 + a^2} \quad \Rightarrow m_a = 0{,}5\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ **.**

Digər düsturlar da eyni qayda ilə isbat olunur.

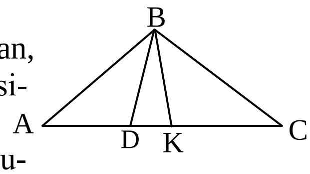
32. Mediana aid çalışmalar

1. ABC üçbucağında AK və BD medianlar,DOKC dördbucaqlısının sahəsi 18 sm^2-dır. ABC üçbucağının sahəsi neçə sm^2-dır?



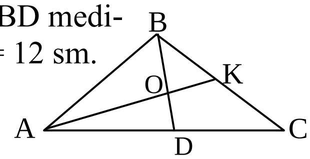
A) 36 B) 45 C) 54 D) 48 E) 56

2. ABC üçbucağında BK median, BD isə ABC üçbucağının sahəsini 1:2 nisbətində bölür.BDK üçbucağının sahəsi 6 sm^2 olduğunu bilərək ABC üçbucağının sahəsi neçə sm^2-dır?



A) 12 B) 27 C) 18 D) 24 E) 36

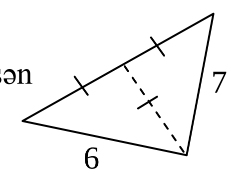
3. ABC üçbucağında AK və BD medianlar, OK**:**OD = 2**:**3 və BD = 12 sm. AK neçə sm-dir?



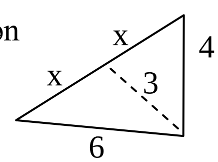
4.Üçbucağın medianları 6sm, 9sm və 12 sm-dir. Üçbucağın böyük tərəfi neçə sm-dir?

5.Üçbucağın bir tərəfi 8 sm,digər iki tərəfinə çəkilmiş medianları 18 sm və 15 sm-dir. Üçüncü median neçə sm-dir?

6.Şəkildəki verilənlərə əsasən üçbucağın sahəsini tapın.



7.Şəkildəki verilənlərə əsasən x parçasını tapın.



8.Üçbucağın medianlarından biri 18 sm-dir.Onun perimetrinin ən kiçik tam qiyməti neçə sm-dir?

9.Üçbucağın perimetri 24 sm-dir.Onun medianının ən böyük tam qiyməti neçə sm-dir?

10.Üçbucağın tərəflərinin kvadratları cəmi 240-dır. Onun medianlarının kvadratları cəmini tapın.

11.Üçbucağın medianlarının kvadratları cəmi 240-dır. Onun tərəflərinin kvadratları cəmini tapın.

12. ABC üçbucağının sahəsi 42 sm^2-dır.AOB üçbucağının sahəsi neçə sm^2-dır.
A) 16 B)15 C)14 D)12 E)7

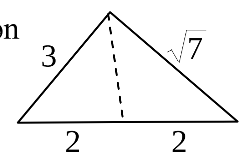
13. Sahəsi 80 sm^2 olan ABC üçbucağında BK medianı və BD tənböləni çəkilmiş və AB:BC = 2**:**3.BDK üçbucağının sahəsi neçə sm^2-dır.
A) 8 B)10 C)12 D)15 E) 16

14. ABC üçbucağında AK və BD medianları O nöqtəsində kəsişirlər, S_{OBK} **:** S_{AOB} =?

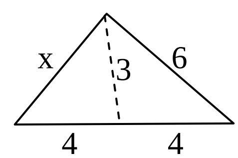
15.Üçbucağın medianları 9sm, 12sm və 15 sm-dir.Üçbucağın kiçik tərəfi neçə sm-dir?

16.Üçbucağın bir tərəfi 16 sm,digər iki tərəfinə çəkilmiş medianları 18 sm və 21 sm-dir.Üçüncü median neçə sm-dir?

17.Şəkildəki verilənlərə əsasən Medianın uzunluğunu tapın.



18.Şəkildəki verilənlərə əsasən x tərəfini tapın.



19.Üçbucağın medianlarından biri 8 sm-dir.Onun perimetri neçə santimetr ola bilər?
A) 14 B)13 C)15 D)16 E)17

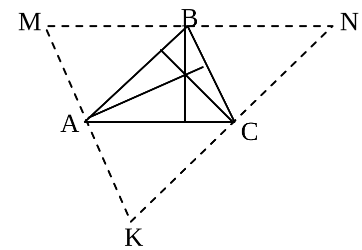
20.Üçbucağın perimetri 24 sm-dir.Onun medianı neçə santimetr ola bilər?
A) 11 B)12 C)13 D)14 E)15

21.Üçbucağın tərəflərinin kvadratları cəmi 160-dır.Onun medianlarının kvadratları cəmi hansı ədəd ola bilər?
A) 100 B)110 C)120 D)125 E)130

22.Üçbucağın medianlarının kvadratları cəmi 360-dır. Onun tərəflərinin kvadratları cəmi hansı ədəd ola bilər?
A) 500 B)520 C)480 D)540 E)560

§33. Hündürlüyün xassələri

1.***Üçbucağın hündürlükləri və ya onların uzantıları bir nöqtədə kəsişir,belə ki:***
a) itibucaqlı Δ-da hündürlüklərin kəsişmə nöqtəsi Δ-ın daxilində;
b) düzbucaqlı Δ-da düz bucaq təpəsində;
c) korbucaqlı Δ-da hündürlüklərin uzantılarının kəsişmə nöqtəsi Δ-ın xaricində yerləşir.



İsbatı. ABC üçbucağının təpələrindən qarşı tərəflərə çəkilmiş paralellərin kəsişmə nöqtələrini M , N , K ilə işarə edək.Paralel düz xətlərin digər paralel düz xətlər arasında qalan parçaları bərabər olduğundan

KC =AB = CN , AM = BC = AK, MB = AC = BN.

Buradan alırıq ki, A , B , C nöqtələri MNK üçbucağının tərəflərinin orta nöqtələridir.

İki paralel düz xətdən birinə perpendikulyar olan d/x digərinə də perpendikulyar olduğu üçün ABC üçbucağının **hündürlükləri** MNK üçbucağının tərəflərinin **orta perpendikulyarları** üzərində olacaqdır.

MNK üçbucağının tərəflərinin orta perpendikulyarları bir nöqtədə kəsişdiyindən ABC üçbucağının hündürlükləri də bir nöqtədə kəsişir.

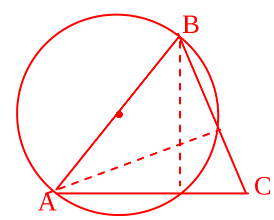
Qeyd.*Sadə mühakimələrlə alırıq ki, itibucaqlı ,düzbucaqlı və korbucaqlı üçbucaqların hündürlüklərin kəsişmə nöqtəsi uyğun olaraq verilmiş üçbucağın daxilində, düz bucaq təpəsində və üçbucaq xaricində yerləşir.*

2***. İstənilən üçbucaqda tərəflərlə bu tərəflərə çəkilmiş hündürlüklər hasilləri bərabərdir:***

$$ah_a = bh_b = ch_c$$

İsbatı aşgardır,çünki bu hasillərin hər biri üçbucağın sahəsinin iki mislinə bərabərdir.

3***. Diametri üçbucağın tərəfi olan çevrə bu tərəfin uclarından endirilən hündürlüklərin oturacqlarından keçir.***



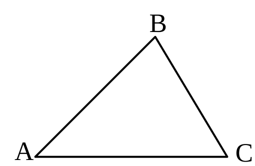
İsbatı şəkildən aydındır,çünki 180^o-li qövsə söykənən bucaq düz bucaqdır.

Nəticə. ***Verilmiş üçbucağın yalnız bir tərəfini diametr qəbul edib çevrə çəkməklə onun hündürlüyünün üçünü də qurmaq mümkündür.***

Çalışmalar

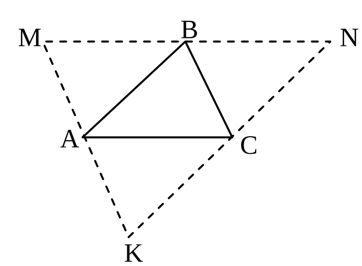
1.ABC üçbucağında AB = 12 sm, BC = 10 sm,BC tərəfinə çəkilmiş hündürlük 8 sm-dir.AB tərəfinə çəkilmiş hündürlüyü tapın.

2. ABC üçbucağında AB =18 sm, BC =14 sm, BC = 16 sm. AB tərəfinə çəkilmiş hündürlüyü tapın.



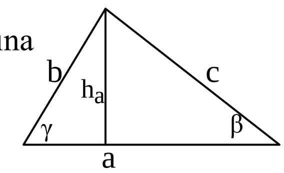
3.ABC üçbucağında AB = 15 sm, BC = 12 sm, AC tərəfinə çəkilmiş hündürlük 9 sm-dir.Xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

4.ABC üçbucağının perimetrinin 37 sm ,A , B , C təpələri MNK üçbucağının tərəflərinin orta nöqtələridir. MNK üçbucağının perimetrini tapın.



5.ABC üçbucağının sahəsi 33 sm^2 , A,B,C təpələri MNK üçbucağının tərəflərinin orta nöqtələridir. MNK üçbucağının sahəsini tapın.

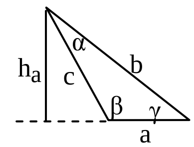
§ 34. Üçbucağın sahə düsturları



1.Artıq bilirik ki**,** üçbucağın sahəsi(S) oturacaqla hündürlük hasilininin yarısına bərabərdir: $S = 0{,}5ah_a = 0{,}5\,bh_b = 0{,}5\,ch_c$ **.**

Bu düsturlarda hündürlüyü tərəflərlə ifadə etsək (məs. $h_a = b\sin\gamma$) ,onda

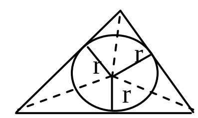
2. $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$ **,**



kor bucaq halında $\sin\beta = \sin(180^\circ - \beta)$ düsturu nəzərə alınmışdır.

3. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ***(Heron düsturu) ,*** $p = (a+b+c)/2$**;**

4. $S = pr$ **,** $p = (a+b+c)/2$**;** **İsbatı :** S = ar/2 + br/2 +cr/2 = r(a+b+c)/2 = pr**.**

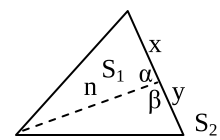


5. S = abc/ (4R), (R – üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusudur)**.**

İsbatı: $S = 0{,}5bc\sin\alpha = 0{,}5bc \cdot a/(2R) = abc/(4R)$ **.**

Qeyd . *Üçbucağın təpəsilə qarşı tərəfi birləşdirən parça (n) bu*

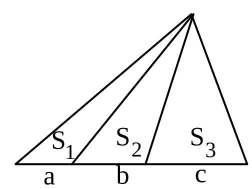
Δ*-ın* ***sahəsini*** *uyğun olaraq qarşı tərəfdəki* ***parçalar nisbətində*** *bölür* **:**



$$S_1 : S_2 = x : y\,.$$

İsbatı. $S_1 : S_2 = \frac{1}{2}xn\sin\alpha : (\frac{1}{2}ny\sin\beta) = x : y$**.**

Nəticə1. ***Üçbucağın təpəsilə qarşı tərəfi birləşdirən parçalar bu Δ-ın sahəsini uyğun olaraq qarşı tərəfdəki parçalar nisbətində bölür :***



$$S_1 : S_2 : S_3 = a:b:c\,.$$

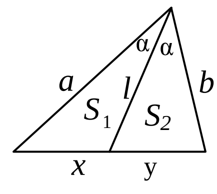
Bu xassənın isbatı da əvvəlki isbat kimi aparılır **.**

Nəticə 2. *Üçbucağın təpəsilə qarşı tərəfi birləşdirən parçalar qarşı tərəfi bərabər hissələrə bölürsə,onda uyğun sahələr də bərabərdir.Tərs mülahizə də doğrudur, yəni sahələr bərabərdirsə ,uyğun parçalar da bərabərdir**:***

$$S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow a = b = c\,.$$

Nəticə 3.İstənilən üçbucaqda*:*

a) *Median üçbucağın sahəsini* ***yarıya bölür;***



b) *Üçbucağın təpəsilə qarşı tərəfi birləşdirən və üçbucağın sahəsini yarı bölən* ***parça mediandır;***

c)*Tənbölən üçbucağın sahəsini çəkildiyi bucağın uyğun* ***tərəfləri nisbətində*** *bölür:*

$$S_1 : S_2 = a : b$$

Doğrudan da, tənbölənin xassəsinə görə $a : b = x : y = S_1 : S_2$.

d)*Üçbucağın sahəsini və perimetrini yarıya bölən d/x* ***daxilə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən*** *keçir.*

§ 35. Çalışmalar

1. İki tərəfi 13 sm və 8 sm ,bu tərəflər arasındakı bucağı 30^o olan üçbucağın sahəsini hesablayın.

2. İki tərəfi $2\sqrt{2}$ sm və 7 sm ,bu tərəflər arasındakı bucağı 45^o olan üçbucağın sahəsini hesablayın.

3. Tərəfləri 11 sm, 7 sm və 6 sm olan üçbucağın sahəsini hesablayın.

4. Tərəfləri 18 sm, 12 sm və10 sm olan üçbucağın sahəsini hesablayın.

5. Bir tərəfi 12 sm, bu tərəfə bitişik bucaqları 75^o və 45^o olan üçbucağın sahəsini hesablayın.

6. Bir tərəfi 16 sm, bu tərəfə bitişik bucaqları 105^o və 30^o olan üçbucağın sahəsini hesablayın.

7. Tərəfləri 12 sm, 9 sm və 7 sm olan üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu hesablayın.

8. Tərəfləri 10 sm, 9 sm və 11 sm olan üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu hesablayın.

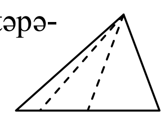
9. Tərəfləri 12 sm, 9 sm və 7 sm olan üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu hesablayın.

10. Tərəfləri 20 sm, 16 sm və 12 sm olan üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu hesablayın.

11. Düzbucaqı üçbucaqda katetlərin hipotenuz üzərindəki proyeksiyası 3 sm və 4 sm-dir.Üçbucağın sahəsini hesablayın.

12. Düzbucaqlı üçbucaqda katetlərin hipotenuz üzərindəki proyeksiyası 4 sm və 9 sm-dir.Üçbucağın sahəsini hesablayın.

13. Sahəsi 24 sm^2 olan üçbucağın bir təpəsindən qarşı tərəfə çəkilən parçalar bu tərəfi 1:2:3 nisbətində bölür. Üçbucağın parçalar arasında qalan hissəsinin sahəsini tapın.

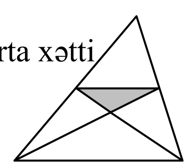


14. Üçbucağın bir təpəsindən qarşı tərəfə çəkilən parçalar bu tərəfi üç bərabər hissəyə bölür. Üçbucağın parçalar arasında qalan hissəsinin sahəsinin 19 sm^2 olduğunu bilərək, üçbucağın sahəsini tapın.

15. Oturacağı $\sqrt{10}$ sm , təpə bucağının tangensi 0,75 olan bərabəryanlı üçbucağın sahəsini tapın.

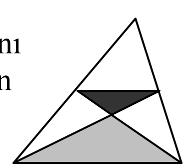
16. Oturacağı $\sqrt{5}$ sm , təpə bucağının kotangensi 0,75 olan bərabəryanlı üçbucağın sahəsini tapın.

17. Sahəsi 36 sm^2 olan üçbucağın orta xətti və iki medianı çəkilmişdir.Şəkildəki kölgəli üçbucağın sahəsini tapın.



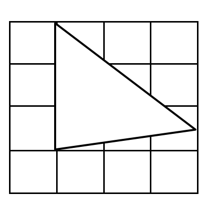
18. Üçbucağın orta xətti və iki medianı çəkilmişdir. Şəkildəki kölgəli üçbucağın sahəsinin 5 sm^2 olduğunu bilərək,verilən üçbucağın sahəsini tapın.

19. Üçbucağın orta xətti və iki medianı çəkilmişdir.Şəkildəki boz üçbucağın sahəsi 24 sm^2 -dir.Qara üçbucağın sahəsini tapın.

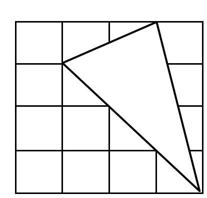


20. Üçbucağın orta xətti və iki medianı çəkilmişdir.Şəkildəki boz üçbucağın sahəsi 4 sm^2 -dır.Verilən üçbucağın sahəsini tapın.

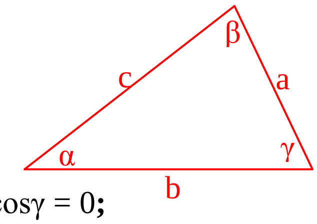
21. Tərəfi 1 sm olan kvadratlara bölünmüş fiqurdakı üçbucağın sahəsini tapın.



22. Tərəfi 1 sm olan kvadratlara bölünmüş fiqurdakı üçbucağın sahəsini tapın.



§36. Tətqiqat xarakterli çalışma nümunələri



1.İsbat edin ki, **a)** $\gamma = 90^{o}$ **olduqda** $\longrightarrow$ $\cos\gamma = 0$**;**

b) $c^2 > a^2 + b^2$ ***olduqda c tərəfi qarşısındakı bucaq kor bucaqdır;***

c) $c^2 < a^2 + b^2$ ***olduqda c tərəfi qarşısındakı bucaq iti bucaqdır;***

İsbatı. a) *Pifaqor teoreminə görə* $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \cos\gamma = 0$;

b) $c^2 > a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 < 0 \Rightarrow \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0 \Rightarrow \cos\gamma < 0 \Rightarrow \gamma > 90^{o}$;

c) $c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 > 0 \Rightarrow \cos\gamma > 0 \Rightarrow \gamma < 90^{o}$, yəni γ iti bucaqdır.

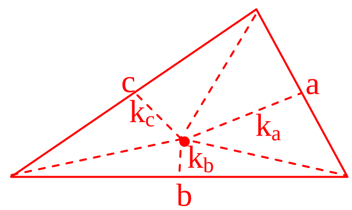
Qeyd edək ki, ***$c^2 < a^2 + b^2$, $a^2 < c^2 + b^2$, $b^2 < a^2 + c^2$ şərtlərinin üçü də eyni zamanda ödənildikdə bu üçbucaq itibucaqlıdır.***

Lakin verilmiş üçbucağın korbucaqlı olması üçün $c^2 > a^2 + b^2$, $a^2 > c^2 + b^2$, $b^2 > a^2 + c^2$ şərtlərindən yalnız birinin ödənilməsi kifayətdir.

2)İsbat edin ki, ixtiyari ABC üçbucağında

$\angle BOC = 2\angle A$, $\angle AOC = 2\angle B$, $\angle AOB = 2\angle C$,

burada O nöqtəsi xaricə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir.

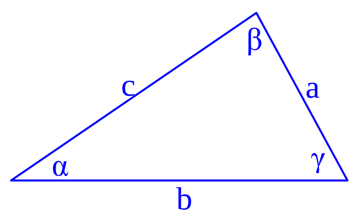


3) *İsbat edin ki, ixtiyari üçbucağında*

$$ak_a + bk_b + ck_c = (a + b + c)r, \qquad (*)$$

burada a , b , c - üçbucağın tərəfləri, k_a, k_b, k_c - *üçbucağın daxilindəki ixtiyari nöqtədən tərəflərə endirilmiş perpendikulyarlar,r-daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur.*

İsbatı.Şəkildən aydındır ki, $ak_a + bk_b + ck_c = 2S = (a + b + c)r$.



4) *İsbat edin ki, ixtiyari üçbucaqda*

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta,$$
$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma, \qquad (**)$$
$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha,$$

burada a , b , c - üçbucağın tərəfləri, α , β , γ - bu tərəflər qarşısındakı bucaqlardır.

İsbatı. Kosinuslar teoreminə görə

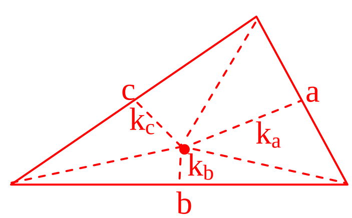
$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos\gamma$, $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac\cos\beta$, $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\alpha$

Bu bərabərlikləri cüt-cüt tərəf-tərəfə toplamaqla alırıq:

$2a^2 = 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta \Rightarrow a = b\cos\gamma + c\cos\beta$;

$2b^2 = 2ab\cos\gamma + 2bc\cos\alpha \Rightarrow b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$;

$2c^2 = 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha \Rightarrow c = a\cos\beta + b\cos\alpha$.



5) *İsbat edin ki, ixtiyari itibucaqlı üçbucaqda*

$$k_a + k_b + k_c = R + r,$$

burada k_a, k_b, k_c - xaricə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən tərəflərə endirilmiş perpendikulyar , R və r - xaricə və daxilə çəkilmiş çevrələrin radiuslarıdır.

İsbatı.(**) bərabərliklərini tərəf-tərəfə toplasaq alırıq:

$a + b + c = (b + c)\cos\alpha + (a + c)\cos\beta + (a + b)\cos\gamma$.

Bu bərabərliyin hər tərəfini R-ə vurub $R\cos\alpha = k_a$, $R\cos\beta = k_b$, $R\cos\gamma = k_c$ münasibətlərini və (*) bərabərliyini nəzərə alsaq , nəhayət alırıq ki,

$(a + b + c)R = (b + c)k_a + (a + c)k_b + (a + b)k_c = (a + b + c)k_a + (a + b + c)k_b + (a + b + c)k_c -$
$-(ak_a + bk_b + ck_c) \Rightarrow R + r = k_a + k_b + k_c$.

Nəticə. ***Korbucaqlı üçbucaqda $R + r = k_a + k_b - k_c$ ($\gamma > 90^{0}$) bərabərliyi doğrudur.***

§ 37. İxtiyari üçbucaqda çevirmə düsturları

Bir çox çalışmaların həllində, isbatlarda və bir sıra araşdırmalarda triqonometrik funksiyaların birindən digərinə və yaxud böyük argumentdən kiçik argumentə keçid zərurəti ilə qarşılaşırıq.

Artıq bilirik ki:

1) α iti bucağı üçün:
sinα = cos(90º-α), coα = sin(90º-α);
tgα = ctg(90º-α), ctgα = tg(90º-α).

2) düz bucaq üçün :
sin90º = 1
cos90º = 0
tg90º-yoxdur , ctg90º = 0.

3) *α kor bucaq olduqda*
sinα = sin(180º-α), cosα = -cos(180º-α);
tgα = -tg(180º-α), ctgα = -ctg(180º-α).

Nəticə 1. Bucaqları *α , β , γ olan üçbucaqda*
sinα = sin(β + γ), cosα = -cos(β + γ);
tgα = -tg(β + γ), ctgα = -ctg(β + γ);

Üçbucaqda çevirmə düsturları cədvəli

	(90º-α)	(90º+α)	(180º-α)
sin	**cosα**	**cosα**	**sinα**
cos	**sinα**	**- sinα**	**- cosα**
tg	**ctgα**	**- ctgα**	**- tgα**
ctg	**tgα**	**- tgα**	**- ctgα**

Nəticə 2. Asanlıqla isbat etmək olar ki**,**
α iti bucağı üçün
cos(90º + α) = - sinα ; tg (90º + α) = - ctgα
sin(90º + α) = cosα ; ctg (90º + α) = - tgα ;

Ç a l ı ş m a l a r

1. ☺ Qonşu bucaqların**:**
a) sinusları **...** ədədlərdir;
b) kosinusları **...** ədədlərdir;
c) tangensləri **...** ədədlərdir;
d) kotangensləri **...** ədədlərdir;
e) α + β =180º oduqda
cosα + cos β = **... .**
sinα + sin β = **... .**
tgα + tgβ = **... .**
ctgα + ctg β = **... .**
f) α + β =90º oduqda
cosα = **... .**
sinα = **... .**
tgα = **... .**
ctgα = **... .**

2. ☺ 0< α < 180º olduqda**:**
a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ = **... ;**
b) $1 + tg^2\alpha$ = **... ;**
c) $1 + ctg^2\alpha$ = **... ;**
d) **...** $= \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ **;** α - iti buc.
e) cos α = **...** $\sqrt{1-\ldots}$ **;** α - kor b.
f) $\cos^2\alpha = \frac{1}{\ldots}$; $\sin^2\alpha = \frac{1}{\ldots}$;
k) tg α və ctg α **...** ədədlərdir**.**

3.Sadələşdirin**:**
a) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha$ **;**
b) $tg\alpha\, ctg\alpha + tg^2\alpha$ **;**
c) $tg\beta\, ctg\beta + ctg^2\beta$ **;**
d) $\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\alpha - \cos^4\alpha + 1$;
e) $1 + tg\,\alpha + ctg\,\alpha - \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$;
f) $2 + tg^2\alpha + ctg^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$;
k) $\sin^4\alpha + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos^4\alpha$;
m) $1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;
n) $1 - \sin^4\alpha - \cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^2\alpha$;

4.tg α + ctg α = a olduğunu bilərək**:**
a) sinα cosα ;b) $tg^2\alpha + ctg^2\alpha$;c) $tg^3\alpha + ctg^3\alpha$ ifadələrini a ilə ifadə edin.

5. sin α + cos α = a olduğunu bilərək**:**
a) sinα cosα ; b) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ ifadələrini a ilə ifadə edin.

6. α kor bucağı üçün sin α = 0,6 .Digər triqonometrik funksiyaların qiymətlərini tapın.

7. ctgα = -1 olduğunu bilərək digər triqonometrik funksiyaların qiymətlərini tapın.

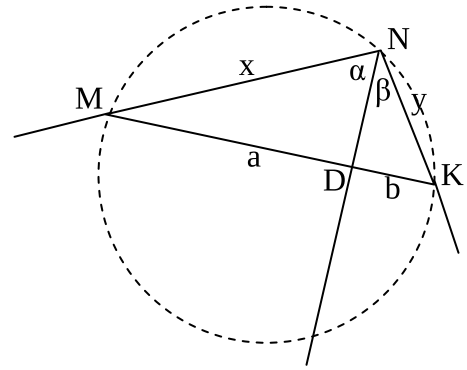
8. Hesablayın:
a)cos 120º - cos150º sin45º - $\cos^4 60º$;
b) tg 120º - ctg150º cos45º - cos 90ºsin20º;
c) sin 120º - tg150º sin150º - $ctg^4 45º$.

§ 38. İki bucaq cəmi və fərqinin triq. funksiyaları.İkiqat arqument düsturları

Aşağıdakı teorem və ondan çıxan nəticələrin isbatı ixtiyari üçbucaqda həyata keçirilir.

Teorem (***cəm və fərq düsturları haqqında***).

$0<\alpha, \beta<180^o$ şərini ödəyən α və β bucaqları üçün



1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$;
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$.

2. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$;
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

3. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$; $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}$.

İsbatı. Tutaq ki, α və β iti bucaqlardır. $\angle N = \alpha+\beta$ bucağını nəzərdən keçirək. ND şüasını və bu şüaya perpendikulyar olan MK parçasını çəkək: $\angle MND = \alpha$, $\angle DNK = \beta$. MNK üçbucağı və onun xaricinə çəkilmiş çevrəyə əsasən

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{a+b}{2R} = \frac{x\sin\alpha + y\sin\beta}{2R} = \sin\alpha\cdot\frac{x}{2R} + \sin\beta\cdot\frac{y}{2R} = \sin\alpha\cdot\sin\angle NKM +$$
$$+\sin\beta\cdot\sin\angle NMK = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha ;$$

Qeyd edək ki, α və β bucaqlarından biri kor bucaq olduqda keçid düsturlarından istifadə edərək iti bucaq halına gəlmək mümkündür.

$\cos(\alpha-\beta)$ $= \sin(90 -(\alpha-\beta)) = \sin(90^o -\alpha+\beta) = \sin(90^o -\alpha)\cos\beta + \sin\beta\cos(90^o -\alpha) =$
$= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$;

$\sin(\alpha-\beta)$ $= \cos(90^o-(\alpha-\beta)) = \cos(90^o+\beta-\alpha) = \cos(90^o+\beta)\cos\alpha + \sin(90^o+\beta)\sin\alpha =$
$= -\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$ **$= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$;**

$\cos(\alpha+\beta)$ $= \sin(90 -(\alpha+\beta)) = \sin(90^o -\alpha-\beta) = \sin(90^o -\alpha)\cos\beta - \sin\beta\cos(90^o -\alpha) =$
$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

tg(α + β) və tg(α - β)-nın tərifdəki düsturlarını yazıb surət və məxrəci cosα cosβ hasilinə bölməklə 3-cü düsturları alırıq.

Nəticə 1. α = β halında cəm düsturlarından *ikiqat arqument* düsturlarını alırıq:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \underline{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = 1-\sin^2\alpha - \sin^2\alpha = \underline{1-2\sin^2\alpha =}$$
$$= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = \underline{2\cos^2\alpha - 1;}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha\cdot tg\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}; \quad \sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}; \quad \cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha};$$

Nəticə 2. İkiqat arqument düsturlarında $\alpha = \dfrac{x}{2}$ əvəzləməsi etsək , onda

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}; \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1;$$

Nəticə 3. *Dərəcəniendirmə düsturları :*

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \quad tg^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

Qeyd. $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta - 1}{ctg\beta + ctg\alpha}$; $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta + 1}{ctg\beta - ctg\alpha}$.

☺ **$\sin 3\alpha$** $= \sin(2\alpha+\alpha) =$ **... $= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;** **$\cos 3\alpha$ = ... $= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.**

§ 39. Cəmin və fərqin triq. funksiyalarına aid çalışmalar

1. $\sin 75^o = \sin(45^o + 30^o) =$ **...**

2. $\cos 75^o = \cos(45^o + 30^o) =$ **...**

3. $tg 75^o = tg(45^o + 30^o) =$ **...**

4 . $ctg 75^o = tg 15^o = tg(45^o - 30^o) =$ **...**

5. $\sin 15^o = \sin(45^o - 30^o) =$ **...**

6. $\cos 15^o =$ **...**

7. $\cos 105^o =$ **...**

8. $tg 15^o =$ **...**

9. $\sin 12^o \cos 48^o + \sin 48^o \cos 12^o =$ **...**

10. $\sin 62^o \sin 2^o + \cos 62^o \cos 2^o =$ **...**

11. $\sin 12^o \cos 48^o - \sin 48^o \cos 12^o =$ **...**

12. $\cos 42^o \cos 48^o - \sin 48^o \sin 42^o =$ **...**

13. $\sin 12^o \cos 48^o + \sin 48^o \cos 12^o =$ **...**

14. $\dfrac{tg 13^0 + tg 32^0}{1 - tg 13^0 \cdot tg 32^0} =$ **...**

15. $\dfrac{tg 63^0 - tg 3^0}{1 + tg 63^0 \cdot tg 3^0} =$ **...**

16. $2 \sin 22{,}5^o \cos 22{,}5^o =$ **...**

17. $\cos 37{,}5^o \sin 37{,}5^o =$ **...**

18. $\dfrac{2tg 15^0}{1 + tg^2 15^0} =$ **...**

19. $\dfrac{1 - tg^2 22{,}5^0}{1 + tg^2 22{,}5^0} =$ **...**

20. $\dfrac{2tg 15^0}{1 - tg^2 15^0} =$ **...**

21. $\dfrac{\cos 15^0 - \sin 15^0}{\cos 15^0 + \sin 15^0} =$ **...**

22. $tg 1^o\, tg 2^o\, tg 3^o \ \ldots\ tg 86^o\, tg 87^o\, tg 88^o\, tg 89^o =$ **...**

23. $\cos 20^o \cos 40^o \cos 80^o =$ **...**

24. $tg(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}$, $tg(\alpha-\beta) = \frac{1}{3} \Rightarrow tg 2\alpha =$ **...**

4. $ctg\alpha = \frac{1}{2}$, $ctg\beta = \frac{1}{3} \Rightarrow tg(\alpha-\beta) =$ **...**

25. $\sin 18^o \sin 54^o =$ **...**

26. $\cos\frac{\pi}{7} \cos\frac{2\pi}{7} \cos\frac{4\pi}{7} =$ **...**

27. $\sin 10^o \sin 50^o \sin 70^o =$ **...**

28. $\sin 20^o + \cos 20^o\, tg 35^o =$ **...**

29. $\cos 12^o - \cos 12^o\, ctg 39 =$ **...**

30. $tg\,\alpha = \frac{1}{2}$, $tg\,\beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha+\beta =$ **...**

31. $tg\,\alpha = 2$, $tg\,\beta = 3 \Rightarrow \alpha+\beta =$ **...**

32. Eyni bir üçbucağın α və β bucaqları üçün
$\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha+\beta =$ **...**

33. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha - \beta =$ **...**

34. $\dfrac{tg 80^0 + tg 25^0}{1 - tg 80^0 \cdot tg 25^0} =$ **...**

35. $\alpha+\beta = 45^o$, $\alpha-\beta = 30^o \Rightarrow \dfrac{tg^2\alpha - tg^2\beta}{1 - tg^2\alpha \cdot tg^2\beta} =$ **...**

36. $2 \sin 52{,}5^o \cos 52{,}5^o =$ **...**

37. $\cos 37{,}5^o \sin 37{,}5^o =$ **...**

38. $\dfrac{2tg 37{,}5^0}{1 + tg^2 37{,}5^0} =$ **... ;** 39. $\dfrac{1 - tg^2 52{,}5^0}{1 + tg^2 52{,}5^0} =$ **...**

40. $\dfrac{3tg 7{,}5^0}{1 - tg^2 7{,}5^0} =$ **...**

§ 40. Cəmdən hasilə və hasildən cəmə keçid düsturları

İki bucaq cəmi və fərqinin sinus və kosinus düsturlarını nəzərdən keçirək.

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$;
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$.

2. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$;
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

Bu düsturları tərəf - tərəfə toplamaq və çıxmaqla alırıq:

1*. $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$
$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\beta\cos\alpha$

2*. $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$
$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

Burada **$\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$ əvəzləməsi aparaqla ($2\alpha = x + y$, $2\beta = x - y$)** **Sinus və kosinus üçün cəmdən hasilə keçid düsturlarını alırıq:**

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Tangens və **kotangens** üçün cəmdən hasilə keçid düsturları isə aşağıdakılardır:

$$\text{tg}x + \text{tg}y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y};$$

$$\text{tg}x - \text{tg}y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y};$$

$$\text{ctg}x + \text{ctg}y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y};$$

$$\text{ctg}x - \text{ctg}y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x\sin y}.$$

İsbatı. Təriflərə əsasən alırıq:

$$\text{tg}x + \text{tg}y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} == \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y};$$

$$\text{tg}x - \text{tg}y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} == \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y};$$

$$\text{ctg}x + \text{ctg}y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} == \frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y};$$

$$\text{ctg}x - \text{ctg}y = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos y}{\sin y} == \frac{\sin(y-x)}{\sin x\sin y}.$$

Hasildən cəmə keçmə düsturları

1* və 2* düsturlarından ***hasildən cəmə keçid*** düsturlarını alırıq:

$$\sin\alpha\cos\beta = 0{,}5(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = 0{,}5(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta = 0{,}5(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Qeyd. *sinx ±cosx şəklində olan cəmi hasilə çevirmək üçün sinx ±cosx= sinx ±sin(90°-x) çevirmə düsturlarından istifadə edilir.*

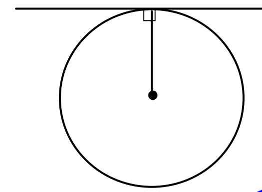
Çalışmalar

Cəmi hasilə çevirin:

1. $\sin 40^\circ + \sin 100^\circ = 2\sin 70^\circ\cos 30^0 = \sqrt{3}\sin 70^\circ$;
2. $\sin 100^\circ - \sin 40^\circ = 2\sin 30^\circ\cos 70^0 = \cos 70^\circ$;
3. $\cos 40^\circ + \cos 100^\circ = 2\cos 70^\circ\cos 30^0 = \sqrt{3}\cos 70^\circ$;
4. $\cos 100^\circ - \cos 40^\circ = -2\sin 70^\circ\sin 30^0 = -\sin 70^\circ$;
5. $\sin 40^\circ + \cos 10^\circ = \sin 40^\circ + \sin 80^\circ = \ldots$;
6. $\sin 40^\circ - \cos 10^\circ = \sin 40^\circ - \sin 80^\circ = \ldots$;
7. $0{,}5 + \cos 10^\circ = \cos 60^\circ + \cos 10^\circ = \ldots$;
8. $0{,}5 + \sin 20^\circ = \sin 30^\circ + \sin 20^\circ = \ldots$;
9. $1 + 2\cos 50^\circ = 2(\cos 60^\circ + \cos 50^\circ) = \ldots$;
10. $\sqrt{3} + 2\sin 70^\circ = 2(\sin 60^\circ + \sin 70^\circ) = \ldots$;
11. a) $1 - 2\cos 50^\circ$; b) $1 - 2\sin 50^\circ$; c) $1 + 2\sin 50^\circ$.
12. a) $\sqrt{2} - 2\cos 50^\circ$; b) $\sqrt{2} - 2\sin 50^\circ$; c) $\sqrt{2} + 2\sin 70^\circ$. d) $\sqrt{2} + 2\cos 80^\circ$.
13. a) $\sqrt{3} - 2\cos 50^\circ$; b) $1 - 2\sin 70^\circ$; c) $1 + 2\sin 80^\circ$; d) $1 + \cos 10^\circ$
14. a) $\sqrt{3} - 2\cos 50^\circ$; b) $1 + \sin 50^\circ$; c) $\sqrt{3} + 2\sin 50^\circ$; d) $\sin 40^\circ - \cos 100^\circ$.
15. a) $1 + \cos 150^\circ$; b) $1 - \sin 140^\circ$; c) $\sqrt{3} + 2\sin 170^\circ$; d) $\sin 140^\circ + \cos 10^\circ$.
16. $\text{tg}48^\circ - \text{tg}28^\circ = \dfrac{\sin(48^0 - 28^0)}{\cos 48^0\cos 28^0} = \ldots$.
17. $\text{tg}48^\circ + \text{tg}28^\circ = \dfrac{\sin(48^0 + 28^0)}{\cos 48^0\cos 28^0} = \ldots$.
18. $\text{ctg}48^\circ - \text{ctg}28^\circ = -(\text{ctg}28^\circ - \text{tg}48^\circ) = \dfrac{\sin(48^0 - 28^0)}{\sin 48^0\sin 28^0} = \ldots$.
19. $\sqrt{3} + \text{tg}40^\circ = \ldots$

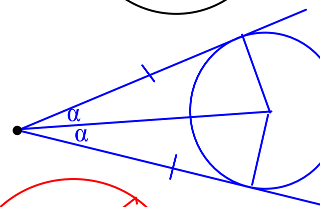
§ 41. Toxunan, vətər və kəsənin xassələri

1. ***Toxunma nöqtəsindən çəkilmiş radius toxunana perpendikulyardır.***



2.*Bir nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunanlar bərabərdir.Bu nöqtəni mərkəzlə birləşdirən d/x parçası toxunanlar arasındakı bucağın tənbölənidir*.

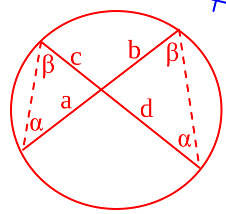
Bu xassənin isbatı aşgardir.



3.*Teorem* ***(vətərlər haqqında)*. *Iki kəsişən vətərin hissələri hasilləri bərabərdir:***

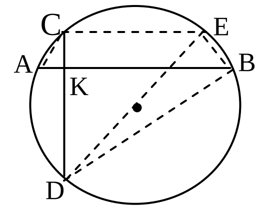
$$ab = cd$$

İsbatı: *c:sinα = a:sinβ ⇒ c:a = sinα : sinβ = b:d ⇒ ab=cd.*



4. *Qarşılıqlı perpendikulyar iki kəsişən vətərin hissələrinin kvadratları cəmi diametrin kvadratına bərabərdir:*

$$AK^2 + BK^2 + CK^2 + DK^2 = DE^2$$

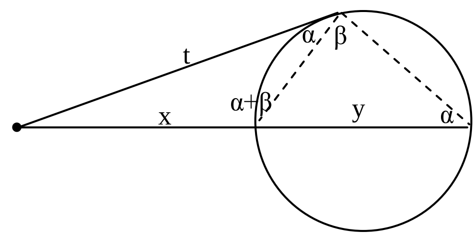


İsbatı. CE ∥ AB vətərini çəkək.Onda AC = EB olduğu üçün

$$DE^2 = DB^2 + EB^2 = DK^2 + KB^2 + AK^2 + CK^2.$$

5.*Hər hansı bir nöqtədən çevrəyə* ***toxunan (t)*** *və* ***kəsən*** *(x+y) çəkildikdə* ***toxunanın kvadratı*** *kəsənin xarici hissəsi ilə kəsənin* ***hasilin****ə bərabərdir:*

$$t^2 = x(x+y)$$

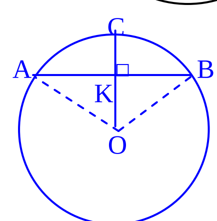


İsbatı. Sinuslar teoreminə görə

$t : (x+y) = \sin\alpha : \sin(\alpha+\beta) = x : t \rightarrow$ $t^2 = x(x+y)$.

5.Vətərə *perpendikular olan radius(parça) onu yarıya bölür*:

$$OC \perp AB \rightarrow AK = KB .$$

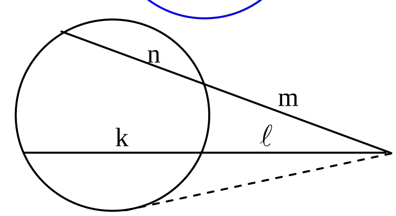


Bu xassə AOB bərabəryanlı Δ-ğın xassəsindən alınır.

Nəticə. Çevrə xaricindəki nöqtədən çəkilmiş iki kəsən üçün aşağıdakı mülahizə doğrudur:

Bir kəsənin özü ilə xarici hissəsinin hasili,digər kəsənin özü ilə xarici hissəsinin hasilinə bərabərdir:

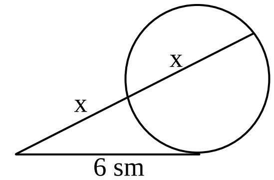
$$m(m + n) = \ell(\ell + k).$$



Çalışma . *Çevrə xaricindəki nöqtədən çəkilmiş kəsənin xarici hissəsi çevrə daxilindəki hissəsinə bərabərdir.Bu nöqtədən çəkilmiş toxunan 6 sm-dir.Kəsən neçə sm-dir?*

Həlli. Məlum xassəyə görə $x \cdot 2x = 36 \Rightarrow 2x^2 = 36 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$.

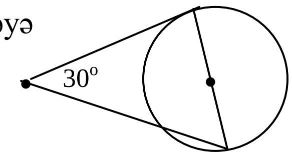
Cavab: $6\sqrt{2}$ sm



§42. Toxunan ,vətər və kəsənə aid çalışmalar

1. Radiusu 3 sm olan çevrə xaricindəki nöqtədən bu iki toxunan çəkilmişdir.Nöqtədən çevrənin mərkəzinə qədər məsafə 5 sm-dir. Toxunma nöqtələri arasındakı məsafə neçə sm-dir?

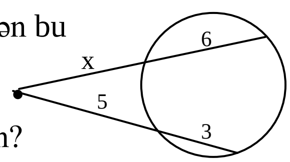
2.Radiusu $\sqrt{3}$ sm olan çevrəyə bir nöqtədən çəkilən toxunan və kəsən arasındakı bucaq 30^o-dir.Şəkilə əsasən kəsənin çevrə xaricindəki hissəsini tapın.



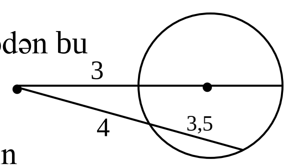
3. Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə toxunan və kəsən çəkilmişdir.Toxunanın 4 sm,kəsənin çevrə daxilində və xaricində qalan hissələrinin bərabərdir. Kəsən neçə sm-dir?

4. Çevrə xaricindəki nöqtədən çəkilən toxunan və kəsən arasındakı bucaq 60^o-dir. Toxunanın 3 sm , kəsənin 9 sm olduğunu bilərək çevrənin radiusunu tapın?

5.Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə iki kəsən çəkilmişdir.Şəkildəki verilənlərə əsasən x-i tapın?

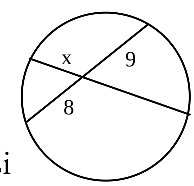


6. Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə iki kəsən çəkilmişdir.Şəkildəki verilənlərə əsasən çevrənin radiusunu tapın?



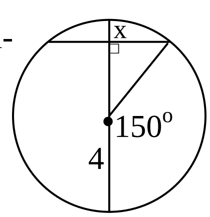
7.Çevrənin eyni bir nöqtəsindən qarşılıqlı perpendikulyar iki vətər çəkilmişdir.Vətərlərin 12 sm və 16 sm olduğunu bilərək çevrənin uzunluğunu tapın.

8.Çevrənin iki vətəri çəkilmişdir. Uzunluğu 18 sm olan vətər digər vətəri 8 sm və 9 sm-lik hissələrə bölür. 18 sm -lik vətərin kiçik hissəsi neçə sm-dir?

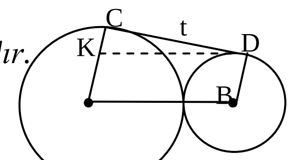


9. Çevrənin mərkəzindən vətərə qədər məsafə 5 sm-dir.Vətərin 24 sm olduğunu bilərək çevrənin diametrini tapın.

10.Şəkilə əsasən seqmentin hündürlüyünü(x) tapın.



11. *KD ∥ AB, CD- toxunandır.*
İsbat edin ki, $\mathbf{t^2 = 4Rr}$

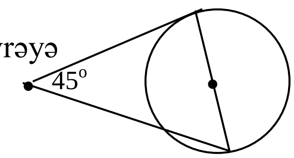


İsbatı. KCD düzbucaqlı Δ-dan alırıq**:**

$(R + r)^2 = (R - r)^2 + t^2 \rightarrow t^2 = 4Rr.$

12. Radiusları 1 sm və 9 sm olan çevrələr xaricən toxunur.Ortaq toxunan neçə sm-dir?

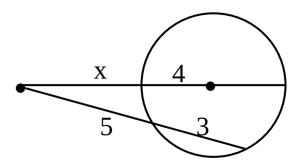
13. Radiusu 7 sm olan çevrəyə bir nöqtədən çəkilən toxunan və kəsən arasındakı bucaq 45^o-dir.Şəkilə əsasən kəsənin çevrə daxilindəki hissəsini tapın.



14. Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə toxunan və kəsən çəkilmişdir.Toxunanın 6 sm , kəsənin çevrə daxilində və xaricində qalan hissələri nisbəti 1**:**2 kimidir.Kəsən neçə sm-dir?

15. Çevrə xaricindəki nöqtədən çəkilən toxunan və kəsən arasında qalan çevrə qövsləri 155^o və 85^o , kəsənin çevrə daxilində qalan hissəsi $\sqrt{3}$ sm-dir. Çevrə nin radiusu neçə sm-dir?

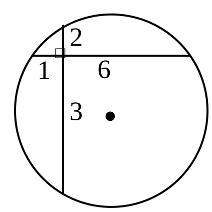
16.Çevrə xaricindəki nöqtədən bu çevrəyə iki kəsən çəkilmişdir.Şəkildəki verilənlərə əsasən x parçasını tapın?



17.Çevrənin eyni bir nöqtəsindən qarşılıqlı perpendikulyar iki vətər çəkilmişdir.Vətərlərin çevrənin mərkəzindən məsafələri 12 sm və 16 sm olduğunu bilərək çevrənin diametrini tapın.

18.Çevrənin iki vətəri çəkilmişdir.Uzunluğu 24 sm olan vətər digər vətəri 9 sm və 6 sm-lik hissələrə bölür.Böyük vətərin hissələri nisbətini tapın.

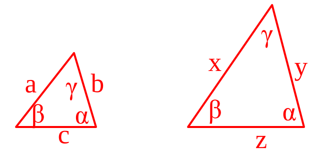
19. Şəkilə əsasən çevrənin diametrini tapın.



§ 43. Oxşar üçbucaqlar

Tərif. *Bir üçbucağın* ***üç bucağı*** *digər üçbucağın* ***üç bucağına*** *bərabər və uyğun tərəfləri nisbəti eyni olan iki üçbucağa* ***oxşar* Δ-lar** *deyilir:*

$$a:x = b:y = c:z$$



Oxşarlığın birinci əlaməti.

Bir Δ-ın iki bucağı digər Δ-ın iki bucağına bərabər olarsa, belə Δ-lar oxşardır.

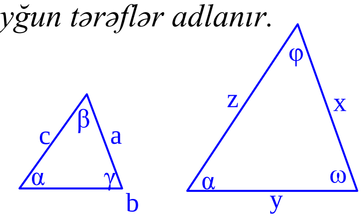
İsbatı. $a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma = x:y:z \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a:x = b:y = c:z$.

Qeyd. *Bərabər bucaqlar qarşısındakı tərəflər uyğun tərəflər adlanır.*

Oxşarlığın ikinci əlaməti.

Bir Δ-ın iki tərəfinin digər Δ-ın iki tərəfinə nisbəti eyni olub bu tərəflər arasındakı bucaqlar bərabər olarsa, belə Δ-lar oxşardır.

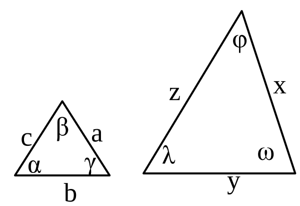


İsbatı. $c:z = b:y \longrightarrow c:b = z:y \longrightarrow \sin\gamma : \sin\beta = \sin\omega:\sin\varphi$;
Sin -lar teoreminə görə $a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma =$
$= \sin\alpha:\sin\varphi:\sin\omega = x:y:z$; $\beta = \varphi$, $\gamma = \omega$.

Oxşarlığın 3-cü əlaməti.

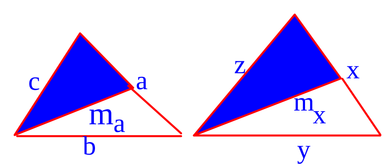
Bir üçbucağın ***üç tərəfi*** *digər üçbucağın* ***üç tərəfi*** *ilə* ***mütənasibdirsə****, bu üçbucaqlar* ***oxşardır:***

$$a:b:c = x:y:z$$



İsbatı. Tutaq ki, $\alpha \neq \lambda$. Şərtə görə $b:c = y:z$, onda 2-ci əlamətə görə bu Δ-lar oxşar ola bilməz, yəni $a:b:c \neq x:y:z$. Bu isə şərtə ziddir. Deməli, $\alpha = \lambda$. Eyni qayda ilə $\beta = \varphi$, $\gamma = \omega$.

Nəticə1. ***Oxşar Δ-ların perimetrlər, medianlar, tənbölənlər, hündürlüklər nisbəti uyğun olaraq tərəflər nisbətinə bərabərdir.***



İsbatı. $a:x = b:y = c:z = k$ $a = xk$, $b = yk$, $c = zk$ olduğundan
$(a+b+c):(x+y+z) = (xk+yk+zk):(x+y+z) = k$.
Oxşarlığın 2-ci əlamətinə görə şəkildəki **kölgəli** Δ-lar oxşardır, yəni

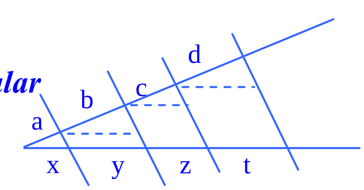
$$m_a : m_x = c:z$$

Eyni mühakimələrlə **tənbölənlər və hündürlüklər** nisbətinin uyğun **tərəflər nisbətinə** bərabərliyi isbat olunur.

Nəticə 2. Oxşar Δ-ların sahələri nisbəti uyğun tərəflər nisbətinin kvadratına bərabərdir.

İsbatı. Sol və sağdakı Δ-ların sahələrini uyğun olaraq S_2 , S_1 ; a və x tərəfləri qarşısındakı bucağı α ilə işarə edək. Onda $S_2/S_1 = 0{,}5bc\sin\alpha : (0{,}5yz\sin\alpha) = b/y \cdot c/z = (b/y)^2$

Teorem (*mütənasib parçalar haqqında*). ***Bucağın tərəflərini paralel d/x-lərlə kəsdikdə tərəflər üzərində ayrılan uyğun parçalar nisbəti bərabərdir:***



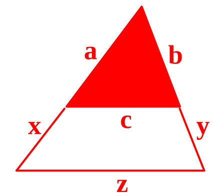
$$a : b : c : d = x : y : z : t \leftrightarrow a : x = b : y = c : z = d : t$$

İsbatı. Bir tərəf üzərindəki bölgü nöqtələrindən bucağın digər tərəfinə paralellər çəksək alınan üçbucaqlar oxşar olduğundan
$a : b = x : y$; $b : c = y : z$; $c : d = z : t$.
Buradan da yuxarıdakı nisbətlər alınır.

§ 44. Oxşarlıq əlamətlərinə aid çalışmalar

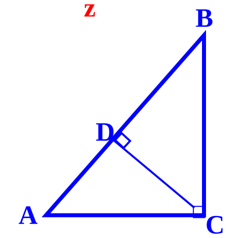
Tətqiqat üçün çalışma nümunələri

1.*Üçbucağın bir tərəfinə paralel çəkilmiş d/x bu Δ-a oxşar üçbucaq ayırır.*



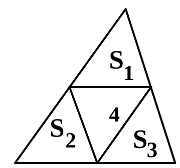
Bu xassə oxşarlığın 1-ci əlamətindən alınır: **a:(a+x) = b:(b+y) = c:z (c‖z).**

2.*Düzbucaqlı Δ-da düz bucaq təpəsindən çəkilmiş hündürlük bu üçbucağı oxşar Δ-lara ayırır:* Δ ABC ~ ΔADC ~ ΔBDC .



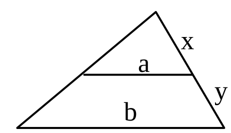
Bu xassə oxşarlığın 1-ci əlamətindən alınır**.**

3.*Üçbucağın orta xətləri bu* Δ*-ı **dörd bərabər sahəli*** Δ*-lara bölür.*
İsbatı. İkinci nəticəyə görə təpələrə bitişik **Δ**-ların sahələri böyük **Δ**-ın sahəsinin(**S**) ¼ hissəsinə bərabərdir.Onda $\mathbf{S_4 = S - \tfrac{3}{4}S = \tfrac{1}{4}S}$.



4. *Üçbucağın orta xətləri bu* Δ*-ı **dörd bərabər*** Δ*-a bölür.*
Bu xassənin isbatı Δ-ların bərabərlik əlamətlərindən alınır.

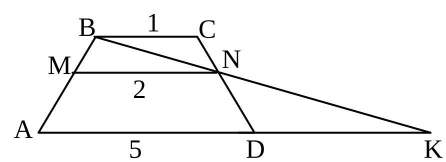
Çalışma 1. Şəkildə a‖b **.** x **:** y nisbətini tapın.
Üçbucaqların oxşarlığına görə a **:** b = x **:** (x+y).



x **:** y = k işarə edək.Onda $\frac{a}{b} = \frac{k}{1+k} \rightarrow$ a + ak = bk$\rightarrow$

$\rightarrow$ a = bk - ak $\rightarrow$ k = $\frac{a}{b-a}$. **Cavab:** x **:** y = $\frac{a}{b-a}$.

Çalışma 2.ABCD trapesiyasında MN parçası oturacaqlara paraleldir.BC = 1 sm, MN = 2 sm, AD = 5sm . DK =?
Həlli. Çalışma 1-dəki xassəyə görə
BN **:** NK = 2 **:(5 - 2) = 2 : 3.**
BNC və NDK üçbucaqları oxşar olduğundan
BC **:** DK =BN **:** NK $\Rightarrow$ 1:DK = 2 : 3$\Rightarrow$ **DK = 1,5.**



Ç a l ı ş m a l a r

1.Sahələri nisbəti 4**:**9 olan iki bərabərtərəfli üçbucağın uyğun perimetrləri nisbətini tapın.

2.Təpə bucaqları bərabər, perimetrləri nisbəti 1**:**3 olan iki bərabəryanlı uyğun üçbucağın oturacaqları nisbətini tapın.

3.Sahələri nisbəti 1**:**2 olan iki oxşar üçbucağın uyğun medianları nisbətini tapın.

4. Perimetrləri nisbti 3**:**4 olan iki oxşar üçbucağın uyğun tənbölənləri nisbətini tapın.

5.Perimetrləri nisbəti 1**:**4 olan iki oxşar üçbucağın uyğun tərəfləri nisbətini tapın.

6.Sahələri nisbəti 9**:**25 olan iki oxşar üçbucağın uyğun hündürlüklər nisbətini tapın.

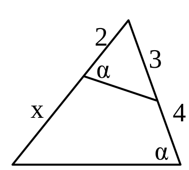
7. Tərəfləri nisbəti 4**:**9 olan iki bərabərtərəfli üçbucağın uyğun perimetrləri nisbətini tapın.

8. Tərəfləri nisbəti 5**:**12 olan iki ərabərtərəfli üçbucağın uyğun orta xətləri nisbətini tapın.

9.Perimetrləri nisbəti 1**:**4 olan iki oxşar üçbucağın uyğun tərəfləri nisbətini tapın.

10. Perimetrləri 6 sm, 14 sm olan iki oxşar üçbucağın uyğun sahələri nisbətini tapın.

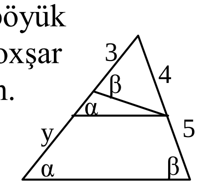
11. Şəkilə əsasən x -i tapın



13. Şəkildəki kiçik üçbucağın sahəsi böyük üçbucağın sahəsindən neçə dəfə kiçikdir?

12. Böyüyünün sahəsini 36 sm^2 ,böyük tərəfləri nisbətini isə 2**:**3 olan iki oxşar üçbucadan kiçiyinin sahəsini tapın.

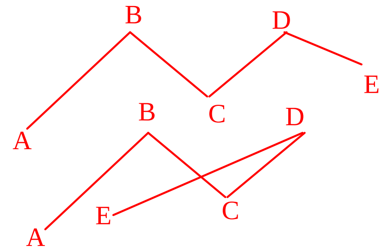
14. Şəkilə əsasən y -i tapın



§ 45. Dördbucaqlılarla ilkin tanışlıq.Sınıq xətlər

Sınıq xətlər. *A , B , C , D , E* nöqtələrini qeyd edək və *AB , BC , CD , DE* parçalarını nəzərdən keçirək, belə ki, *AB* və *BC* , *BC* və *CD* , *CD* və *DE* **qonşu parçaları** bir düz xətt üzərində deyil.

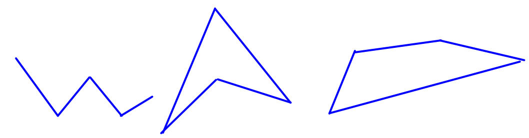
Bu qayda ilə ardıcıl birləşdirilmə ilə alınan ABCDE fiquruna sınıq xətt deyilir.



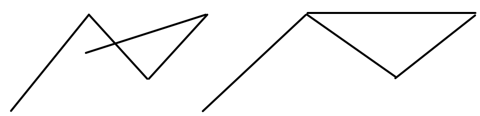
*A , B , C , D , E nöqtələri sınıq xəttin **təpə nöqtələri**, AB , BC , CD , DE parçaları onun **tərəfləri**, A və E nöqtələri isə **uc nöqtələri** adlanır.*

*Ortaq təpəli tərəflər **qonşu tərəflər**,bir tərəfin uclarındakı təpələr isə sınıq xəttin **qonşu təpələri** adlanır.*

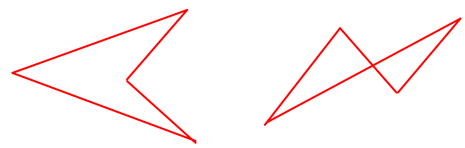
Qonşu olmayan tərəflərinin ortaq nöqtələri olmayan (uc və ya daxili) sınıq xətt sadə sınıq xətt adlanır.



*Qonşu olmayan tərəflərinin ortaq nöqtələri olan sınıq xətt **özünükəsən sınıq xətt** adlanır.*

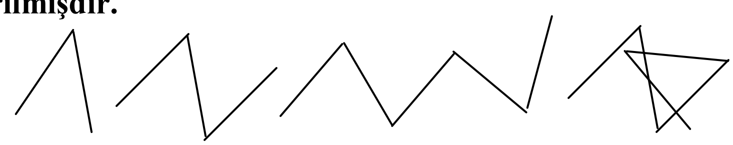


Uc nöqtələri üst-üstə düşən sınıq xəttə qapalı sınıq xətt deyilir.



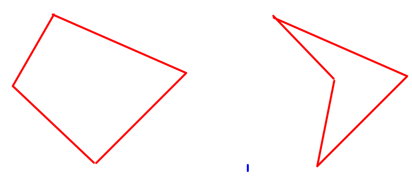
Yuxarıda dördtərəfli sınıq xəttə tərif verilmişdir.

İkitərəfli,üçtərəfli və s. n-tərəfli sınıq xətlərə,onların elementləri və növlərinə də eyni qayda ilə tərif verilir.



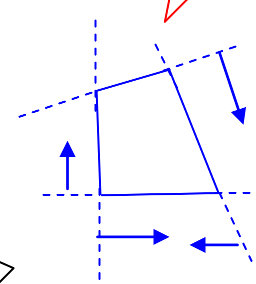
Dördbucaqlılar

Tərif:*Dördtərəfli sadə qapalı sınıq xəttin əmələ gətirdiyi müstəvi fiquruna dördbucaqlı deyilir.*

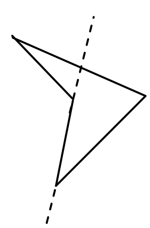


Dördbucaqlını əmələ gətirən sınıq xəttin təpələri bu dördbucaqlının təpələri,tərəflər isə dördbucaqlının tərəfləri adlanır.

İxtiyari bir tərəfini saxlayan düz xəttdən bir tərəfdə qalan dördbucaqlı qabarıq dördbucaqlı adlanır.

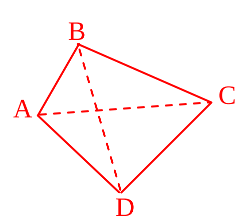


Hər hansı bir tərəfini saxlayan düz xətlə iki hissəyə ayrılan dördbucaqlı **çökük dördbucaqlı** *adlanır.*



Qonşu tərəflər arasındakı bucaqlara dördbucaqlının **daxili bucaqları ,** daxili bucaqların qonşu bucaqlarına dördbucaqlının **xarici bucaqları** deyilir.

Qonşu olmayan təpələri birləşdirən d/x parçasına dördbucaqlının diaqonalı (AC və BD)deyilir.
Bütün tərəflərin cəmi dördbucaqlının perimetri adlanır.

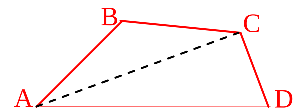


Gələcək şərhimizdə yalnız qabarıq dördbucaqlıları nəzərdən keçirəcəyik!

§ 46. Dördbucaqlının xassələri

Bu paraqrafda ixtiyari dördbucaqlının xassələri öyrənilir.

1.*Daxili bucaqlarının cəmi 360°-dir* ;

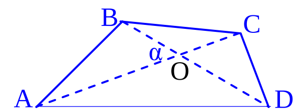


İsbatı.ABCD dördbucaqlısının daxili bucaqlarının cəmi ABC və ACD üçbucaqlarının daxili bucaqlarının cəminə bərabər olduğundan bu cəm $180^o + 180^o = 360^o$-dir.

2.*Dördbucaqlının ixtiyari bir tərəfi qalan tərəflərinin cəmindən kiçikdir:*

$AD < AC + CD < AB + BC + CD$

Digər tərəflər üçün də uyğun bərabərsizlikləri yazmaq olar.



3. *Sahəsi diaqonallar hasilinin yarısı ilə bu diaqonallar arasındakı bucağın sinusu hasilinə bərabərdir:*

$$S = 0{,}5\, AC \cdot BD \sin\alpha .$$

İsbatı.Şəkilə əsasən dördbucaqlının sahəsi

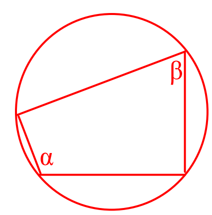
$$S = \frac{1}{2} AO \cdot OB \sin\alpha + \frac{1}{2} OB \cdot OC \sin(180^o - \alpha) +$$

$$+ \frac{1}{2} OC \cdot OD \sin\alpha + \frac{1}{2} AO \cdot OD \sin(180^o - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} OB(AO + OC) \sin\alpha + \frac{1}{2} OD(OC + AO) \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}(AO + OC)(OB + OD)\sin\alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin\alpha$$

Tərif: ***Dördbucaqlının bütün təpələrindən keçən çevrəyə dördbucaqlı xaricinə çəkilmiş çevrə, belə dördbucaqlıya isə çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlı deyilir.***



4.*Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı bucaqlarının cəmi*180° -dir.

İsbatı. *Şəkildəki **α və β** bucaqları daxilə çəkilmiş bucaqlar olduğundan* $2\alpha + 2\beta = 360^o \Rightarrow \boldsymbol{\alpha + \beta = 180^o}$.

Tərs mülahizə də doğrudur**:**

Dördbucaqlının qarşı bucaqlarının cəmi* 180° olarsa,onda bu *dördbucaqlının xaricinə çevrə çəkmək olar.

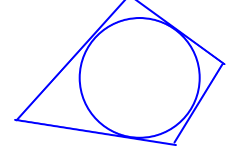
Tərif: ***Dördbucaqlının bütün tərəflərinə toxunan çevrəyə daxilə çəkilmiş çevrə,belə dördbucaqlıya isə çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlı deyilir.***

5. *Dördbucaqlının daxilinə çevrə çəkilmişdirsə, onda qarşı tərəflərin cəmi bərabərdir.*

Bu xassənin isbatı şəkildən aydındır.

Tərs mülahizə də doğrudur**:**

Dördbucaqlının qarşı tərəflərin cəmi bərabərdirsə, onda bu dördbucaqlının daxilinə çevrə çəkmək olar.

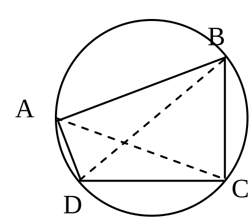


6. *Çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının sahəsini S = pr düsturu ilə hesablamaq olar ,*

burada p - dördbucaqlının yarımperimetri, r- daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur.

7.Ptolemey teoremi.***Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı tərəflərinin hasilləri cəmi onun diaqonallarının hasilinə bərabərdir:***

$$AB \cdot DC + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$



8. *Tərəfləri a,b,c,d olan daxilə çəkilmiş dördbucaqlının sahəsi*

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

düsturu ilə hesablanır , burada p - perimetrin yarısıdır.

§47. **Çalışmalar**

1. Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının bucaqlarından biri 30^o, bu bucaq qarşısındakı diaqonalı 15 sm-dir. Çevrənin diametrini tapın.

2. Tərəfləri müəyyən ardıcıllıqla verilmiş hansı dördbucaqlının daxilinə çevrə çəkmək olar?
A) 3,4,5,6 B) 4,7,8,5 C) 4,5,7,8 D) 7,7,7,8 E) 7,8,9,9

3. İki qarşı bucağı verilmiş hansı dördbucaqlının xaricinə çevrə çəkmək olar?
A) 110^o, 110^o B) 85^o, 125^o C) 145^o, 100^o
D) 126^o, 74^o E) 99^o, 81^o

4. Çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının perimetri 50 sm, çevrənin radiusu 6 sm-dir. dördbucaqlının sahəsini hesablayın.

5. Dördbucaqlının uzunluğu 10 sm olan diaqonalı qarşı təpələrdən 5 sm və 7 sm məsafədədir. Onun sahəsini tapın.

6. Dördbucaqlının üç ardıcıl bucağı 2**:**2**:**4 nisbətində, dördüncü bucağı isə 40^o-dir. Böyük bucağı tapın.

7. Daxilə çəkilmiş dördbucaqlının tərəfləri müəyyən ardıcıllıqla 1 sm, 2 sm, 3 sm və 4 sm-dir. Diaqonallar arasındakı bucağın sinusunu tapın

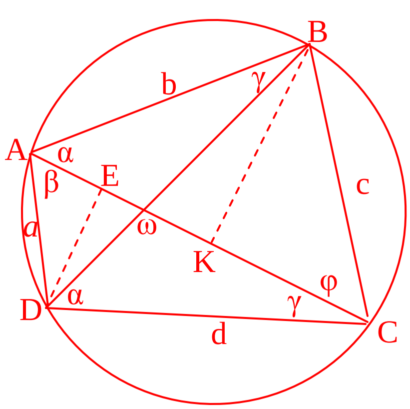
8. Dördbucaqlının tərəflərinin orta nöqtələrinin ardıcıl birləşdirimləsindən alınan dördbucaqlının perimetri 50 sm, dördbucaqlının diaqonalları cəmini tapın.

9. Dördbucaqlının sahəsi 80 sm^2, diaqonalları isə 20 sm və 16 sm-dir. Diaqonallar arasındakı bucağı tapın.

10. Dördbucaqlının diaqonalları 6 sm və 9 sm, onlar arasındakı bucaq isə 60^o-dir. Onun sahəsini tapın.

11. Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının bucaqlarından biri 30^o, bu bucaq qarşısındakı diaqonalı 45 sm-ir. Uzunluğu $30\sqrt{2}$ sm olan digər diaqonal qarşısındakı böyük bucağı tapın.

12. Diaqonalları fərqi 10 sm olan dördbucaqlının tərəflərinin orta nöqtələrinin ardıcıl birləşdirilməsindən alınan dördbucaqlının perimetri 80 sm-dir. Böyük diaqonalı tapın



13. Ptolemey teoremini isbat edin**:**

Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı tərəflərinin hasilləri cəmi onun diaqonallarının hasilinə bərabərdir:

$$ac + db = d_1 \cdot d_2$$

İsbatı. ABCD dördbucaqlısında AC diaqonalına DE və BK perpendikulyarlarını endirək. Şəkilə əsasən

$2S_{ABCD} = AC \cdot DE + AC \cdot BK = DE \cdot (AK + KC) +$
$+ BK \cdot (AE + EC) = DE \cdot AK + DE \cdot KC + BK \cdot AE + BK \cdot EC$.

Sonuncu ifadədə $DE = d\sin\gamma$, $AK = b\cos\alpha$; $DE = a\sin\beta$, $KC = c\cos\varphi$; $BK = c\sin\varphi$, $AE = a\cos\beta$; $BK = b\sin\alpha$, $EC = d\cos\gamma$ bərabərliklərini nəzərə alsaq, onda

$2S_{ABCD} = db(\sin\gamma\cos\alpha + \sin\alpha\cos\gamma) + ac(\sin\beta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\beta) =$
$= ac\sin(\beta+\varphi) + db\sin(\gamma+\alpha) = (ac + db)\sin(\gamma+\alpha) = (ac + db)\sin\omega$.

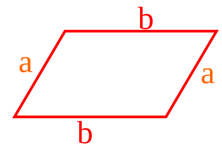
Digər tərəfdən $2S_{ABCD} = AC \cdot BD \sin\omega$, $AC = d_1$ və $BD = d_2$ işarə etsək

$$d_1 \cdot d_2 = ac + db$$

bərabərliyini alırıq ki, bunun da isbatı tələb olunurdu.

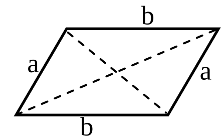
§ **48.** Paraleloqramın xassələri

Tərif: ***Qarşı tərəfləri cüt-cüt bərabər və paralel olan dördbucaqlıya paraleloqram deyilir.***



Elementləri: dörd bucağı, dörd tərəfi, iki diaqonalı, iki hündürlüyü, perimetri və sahəsi.

Növləri: düzbucaqlı, kvadrat, romb, ixtiyari paraleloqram

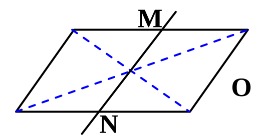


Paraleloqramın xassələri **:**

1. *Qarşı tərəfləri bərabər və paraleldir ;*

2. *Qarşı bucaqlar bərabərdir ;*

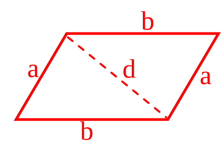
3. *Diaqonallar kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünür* **;**



4. *Bir tərəfə bitişik bucaqların cəmi 180^o-dir* **;**

5. *Diaqonalların kəsişmə nöqtəsi paraleloqramın* ***simmetriya mərkəzidir****, yəni O kəsişmə nöqtəsindən keçən ixtiyari MN düz xətti üçün OM = ON .*

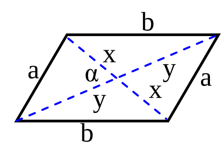
6. *Diaqonal bu fiquru iki bərabər üçbucağa bölür* **;**



Yuxarıdakı xassələrin hər birinin isbatı Δ-ların bərabərlik əlamətlərindən alınır.

7. *Diaqonallar bu fiquru dörd bərabər sahəli üçbucağa bölür;*

İsbatı: $d_1 : 2 = x$, $d_2 : 2 = y$ işarə edək, onda sahə düsturlarına görə diaqonalların ayırdığı üçbucaqlardan hər birinin sahəsi $\frac{1}{2}$ xysinα düsturu ilə hesablandığına görə bu dörd Δ-ın sahələri bərabərdir.



8. *Diaqonalların kvadratları cəmi tərəflərin kvadratları cəminə bərabərdir* **:** $\mathbf{d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2}$ ***;***

İsbatı: cos-lar teoreminə görə

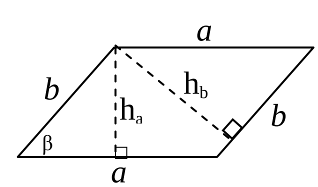
$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$, $b^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha$ **.**

Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplayıb $2x = d_1$, $2y = d_2$ yazsaq

$a^2 + b^2 = 2x^2 + 2y^2 \Rightarrow \mathbf{2a^2 + 2b^2} = 4x^2 + 4y^2 = \mathbf{d_1^2 + d_2^2}$**.**

9. *Perimetri:* $\boldsymbol{P = 2a + 2b = 2(a + b)}$ *;*

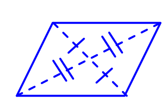
Sahəsi: $\boldsymbol{S = ah_a = bh_b = ab\sin\beta = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha}$ *;*



10. *Qarşı tərəflər arasındakı* ***məsafə*** *uyğun* ***hündürlüyə*** *bərabərdir.*

Paraleloqramın əsas əlamətləri

1.Diaqonalları kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünən dördbucaqlı paraleloqramdır.



2.Simmetriya nöqtəsi olan dördbucaqlı paraleloqramdır.

Bu əlamətlərin isbatı Δ-ların bərabərlik əlamətlərindən alınır.

§49. Çalışmalar

1.ABCD paraleloqramında AC və BD diaqonalları O nöqtəsində kəsişir.AOB , BOC , COD və AOD üçbucaqları üçün hansı mülahizələr doğrudur**:**

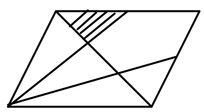
1.Bu üçbucaqlar bərabərdir;
2.Bu üçbucaqların sahələri bərabərdir;
3.Qonşu üçbucaqlar bərabərdir;
4.Qarşı üçbucaqlar bərabərdir;
5.Qonşu üçbucaqların sahələri bərabərdir;

A)1,2,3 B)2,4,5 C) 3,4,5 D)2,3,4 E)1,3,5

2."İxtiyari dördbucaqlının tərəflərinin orta nöqtələrinin ardıcıl birləşdirilməsindən alınan dördbucaqlı **...**"- mülahizəsinin doğru məntiqi davamını hansı fiqur tamamlayır?

A) kvadrat B) romb C) düzbucaqlı
D) paraleloqram E) ixtiyari dördbucaqlı

3.Paraleloqramın təpəsi qarşı tərəflərin ortası ilə birləşdirilmişdir.Ştrixlənmiş üçbucağın sahəsi 2 sm^2-dır. Paraleloqramın sahəsi neçə sm^2-dır.



A) 18 B) 24 C) 36 D) 20 E) 28

4. ABCD paraleloqramında AC = 5 sm, BD = 7 sm , AB = 4 sm. BC tərəfini tapın.

5. ABCD paraleloqramında AB = 5 sm, BC = 6 sm , AC = 7 sm. Paraleloqramın sahəsini tapın.

6. ABCD paraleloqramında AB = 5 sm, BC = 6 sm , AC = 7 sm. Paraleloqramın kiçik hündürlüyünü tapın.

7. Sahəsi 12 sm^2 olan ABCD paraleloqramında AC = 6 sm, BD = 8 sm . Diaqonallar arasındakı bucağı tapın.

8. ABCD paraleloqramında AC = $8\sqrt{5}$ sm, BD = 16 sm, BC = 12 sm. Paraleloqramın sahəsini tapın.

9.ABCD paraleloqramında AC diaqonalı A bucağının tənböləni və BC = 12 sm. Paraleloqramın perimetrini tapın.

10.ABCD paraleloqramında AC diaqonalı A bucağının tənbölənidir. AC = 12 sm və BD = 16 sm . AB tərəfi neçə sm-dir?

A) 10 B)12 C)15 D)16 E)20

11.ABCD dördbucaqlısında AC və BD diaqonalları kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünür.
Neçə hökm doğrudur?

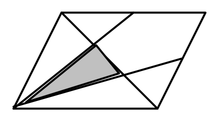
1.Bu dördbucaqlı düzbucaqlıdır ;
2.Bu dördbucaqlı kvadrat ola bilər ;
3. Bu dördbucaqlı paraleloqramdır ;
4. Bu dördbucaqlı düzbucaqlı ola bilər ;
5. Bu dördbucaqlı rombdur;

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

12." Simmetriya mərkəzi olan dördbucaqlı **...** "-hökmünün ən doğru məntiqi davamını hansı fiqur tamamlayır?

A) kvadrat B) romb C) düzbucaqlı
D) paraleloqram E) ixtiyari dördbucaqlı

13. Paraleloqramın təpəsi qarşı tərəflərin ortası ilə birləşdirilmişdir. Paraleloqramın sahəsi 36 sm^2-dır.Kölgəli üçbucağın sahəsi neçə sm^2-dır.



A) 4 B) 5 C)6 D)8 E) 9

14. ABCD paraleloqramında AC = 11 sm, BC = = 7 sm , AB = 6 sm. BD diaqonalını tapın.

15. ABCD paraleloqramında BC = 15 sm, BC və AD tərəfləri arasındakı məsafə 8 sm-dir. Paraleloqramın sahəsini tapın.

16. ABCD paraleloqramında A bucağının tənböləni BC tərəfini 4 sm və 7 sm-lik parçalara bölür. Paraleloqramın perimetrini tapın.

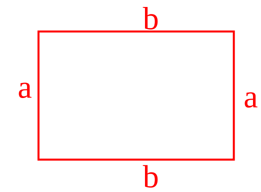
17. ABCD paraleloqramında A bucağının tənböləni ilə B bucağının tənböləni K nöqtəsində kəsişir. AK = 4 sm , BK = 7 sm.ABK üçbucağının sahəsini tapın.

18. Sahəsi $24\sqrt{3}$ sm^2 olan ABCD paraleloqramında AB = 6 sm, AD = 8 sm . A bucağını tapın.

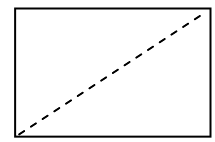
§50. Paraleloqramın xüsusi növlərinin xassələri

Düzbucaqlı

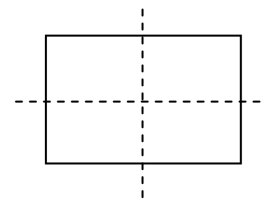
Tərif: ***Qarşı tərəfləri bərabər və hər bir bucağı düz bucaq olan dördbucaqlıya düzbucaqlı deyilir.***

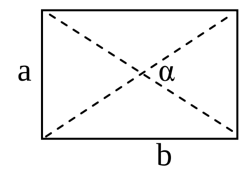


Tərifdən aydındır ki, düzbucaqlı həm də paraleloqramdır. Beləliklə, düzbucaqlı ixtiyari dördbucaqlı və paraleloqramın xassələrinə malik olmaqla yanşı özüməməxsus xassələrə də malikdir. Düzbucaqlının əsas xassələri aşağıdakılardır**:**



1. Qarşı tərəfləri cüt-cüt bərabərdir;
2. Hər bir bucağı 90º-dir;
3. Diaqonalları bərabərdir;
4. Diaqonalı onu iki bərabər düzbucaqlı üçbucağa ayırır;
5. Diaqonalları onu bərabər sahəli dörd üçbucağa ayırır;
6. İki simmetriya oxu vardır ki,onlar da qarşı tərəflərin orta perpendikulyarıdır.
7. Diaqonalların kəsişmə nöqtəsi düzbucaqlının simmetriya mərkəzidir;bu nöqtədə diaqonallar yarıya bölünür;
8. $d^2 = a^2 + b^2$, d - diaqonaldır;
9. $S = ab$; $S = \frac{1}{2} d^2 \sin\alpha$; $P = 2a + 2b = 2(a + b)$.



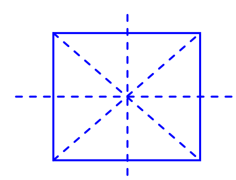


Diaqonalları bərabər olan paraleloqram düzbucaqlıdır.

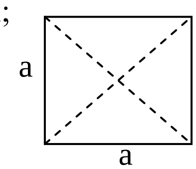
* *

Kvadrat

Tərif: ***Bütün tərəfləri bərabər olan düzbucaqlıya kvadrat deyilir.***



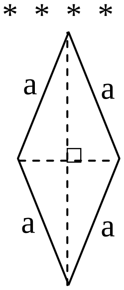
1. Hər bir bucağı 90º, bütün tərəfləri bərabərdir;
2. Diaqonalları bərabər və perpendikulyardır;
3. Diaqonalı qarşı bucaqların tənbölənidir.
4. Diaqonalı onu iki bərabər bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucağa ayırır;
5. Diaqonalları onu dörd bərabər bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucağa ayırır;
6. Dörd simmetriya oxu vardır: iki diaqonal və tərəflərin orta perpendikulyarı;
7. $S = a^2$; $S = \frac{1}{2} d^2$; $P = 4a$ **(**d - diaqonaldır**).**



Diaqonalları perpendikulyar olan düzbucaqlı kvadratdır.

* *

Romb

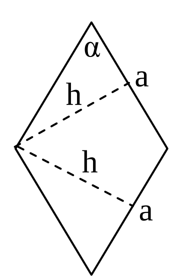


Tərif: ***Bütün tərəfləri bərabər olan paraleloqrama romb deyilir.***

Tərifdən aydındır ki, kvadrat həm də rombdur.

Xassələri:

1. Bütün tərəflər bərabərdir**;**
2. Diaqonalları perpendikulyardır;
3. Diaqonalı onu iki bərabər bərabəryanlı üçbucağa ayırır;
4. Diaqonalları onu dörd bərabər düzbucaqlı üçbucağa ayırır;
5. Diaqonalları onun simmetriya oxlarıdır;
6. Diaqonal qarşı bucaqların tənbölənidir ;
7. Bütün hündürlükləri bərabərdir;
8. $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$, d_1 , d_2 - diaqonallardır;
9. $S = ah = a^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$; $P = 4a$.



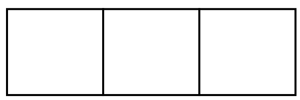
51. Paraleloqramın növlərinə aid çalışmalar

1.Aşağıdakılardan hansılar yanlışdır?
1) Kvadrat düzbucaqlıdır;
2) Paraleloqram düzbucaqlıdır;
3) Romb kvadrat ola bilər;
4) Paraleloqram rombdur;
5) Paraleloqram trapesiya ola bilər.

2.Diaqonalı 7 sm , perimetri 18 sm olan düzbucaqlının sahəsini tapın.

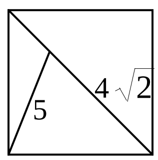
3.Tərəfləri 3 sm və $3\sqrt{3}$ sm olan düzbucaqlının diaqonalları arasındakı bucağı tapın.

4.Üç eyni kvadratın bitişməsindən alınan düzbucaqlının perimetri kvadratların perimetrləri cəmindən 8 vahid kiçikdir.Kvadratın tərəfini tapın.



5. Kvadratın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusları nisbətini tapın.

6. Şəkildəki verilənlərə görə kvadratın tərəfini tapın.



7. Aşağıdakılardan hansılar doğrudur**:**
1) Kvadratın dörd simmetriya oxu var;
2) Paraleloqramın simmetriya mərkəzi yoxdur;
3) Rombun dörd simmetriya oxu var;
4) Paraleloqramın simmetriya oxu ola bilər;
5) Düzbucaqlının iki simmetriya oxu var ?

8.Böyük diaqonalı 14 sm olan rombun bir təpəsindən çəkilmiş hündürlüklər arasındakı bucaq 60^o-dir. Rombun sahəsini tapın.

9.Kiçik diaqonalı 6 sm ,daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu $\sqrt{5}$ sm olan rombun perimetrini tapın.

10.Tərəfləri 12 sm və 16 sm olan düzbucaqlının tərəflərinin orta nöqtələri ardıcıl olaraq birləşdirilmişdir.Alınan paraleloqramın perimetrini tapın.

11. Rombun daxilinə çevrə, çevrənin daxilinə isə bərabərtərəfli üçbucaq çəkilmişdir. Romb və üçbucağın hündürlükləri nisbətini tapın.

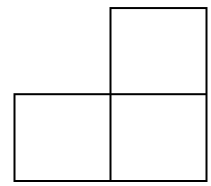
12. Kvadratın sahəsini üç dəfə artırmaq üçün onun tərəfini neçə faiz artımaq lazımdır?

13.Aşağıdakılardan hansılar doğrudur?
1) Kvadratın xaricinə çevrə çəkmək olar;
2) Kvadratın daxilinə çevrə çəkmək olar;
3) Rombun xaricinə çevrə çəkmək olar ;
4) Düzbucaqlının xaricinə çevrə çəkmək olar;
5) Rombun daxilinə çevrə çəkmək olar .

14. Diaqonalı 8 sm , sahəsi18 sm^2 olan düzbucaqlının eni neçə sm-dir?

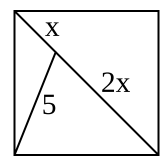
15. Diaqonalı 6 sm və sahəsi $9\sqrt{3}$ sm^2 olan düzbucaqlının diaqonalları arasındakı bucağı tapın.

16.Üç eyni kvadratın bitişməsindən alınan fiqurun perimetrinin kvadratların perimetrləri cəminə nisbətini tapın.



17. Rombun daxilinə çevrə, çevrənin daxilinə isə düzbucaqlı çəkilmişdir. Rombun hündürlüyünün düzbucaqlının diaqonalına nisbətini tapın

18. Şəkildəki verilənlərə görə x parçasını tapın.



19. Kiçik diaqonalı 10 sm olan rombun bir təpəsindən çəkilmiş hündürlüklər arasındakı bucaq 60^o-dir. Rombun tərəfini tapın.

20.Böyük diaqonalı 20 sm,daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu 6 sm olan rombun sahəsini tapın.

21. Kvadratın daxilinə çevrə, çevrənin daxilinə bərabərtərəfli üçbucaq, bu üçbucağın daxilinə isə çevrə çəkilmişdir. Çevrələrin radiuslar nisbətini tapın.

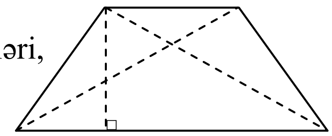
22. Kvadratın perimetrini 20% artırdıqda onun sahəsi 44 sm^2 artdı.Kvadratın tərəfi neçə sm-dır?

23.Düzbucaqlının enini 20% artırıb,uzunluğunu 10% azaltsaq onun sahəsi necə dəyişər?

24. Diaqonalı 5 sm olan düzbucaqlının uzunluğunu 25% azaldıb kvadrat aldılar.Kvadratın peri - met rini tapın.

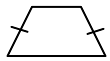
§52. Trapesiya və onun xassələri

Tərif: İki tərəfi paralel və digər iki tərəfi paralel olmayan dördbucaqlıya trapesiya deyilir.

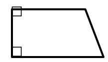


Elementləri: dörd bucağı, iki oturacağı(paralel tərəflər), yan tərəfləri, hündürlük, diaqonallar, perimetr və sahəsi.

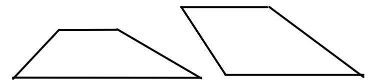
Növləri: Bərabəryanlı, düzbucaqlı və ixtiyari trapesiya.



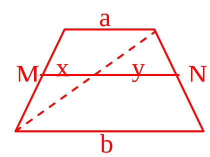
Bərabəryanlı trapesiya



Düzbucaqlı trapesiya



İxtiyari trapesiyalar

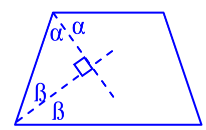


Trapesiyanın orta xətti (yan tərəflərin ortasını birləşdirən parça) **oturacaqlara paralel olub onların cəminin yarısına bərabərdir:**

MN = (a+b)/2 .

Isbatı . MN = x + y = a/2 + b/2 = (a + b)/2.

Trapesiyanın xassələri

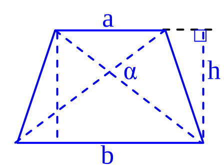


***1.** Yan tərəflərə bitişik bucaqların cəmi 180^o-dir;*

2. Yan tərəflərə bitişik bucaqların tənbölənləri perpendikulyardır;

3.Diaqonallar trapesiyanı dörd Δ-a bölür ki, onlardan ikisi (oturacaqlara bitişiklər) oxşar,digər ikisinin sahələri bərabərdir;

4.Sahəsi iki düsturla hesablanır:

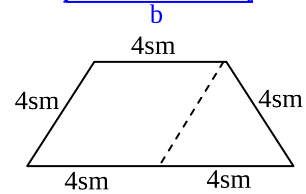


$$S = 0,5(a + b)h = 0,5\, d_1\, d_2 \sin\alpha$$

İsbatı. Şəkildən aydındır ki, S = ½ bh + ½ ah =(a+b)h/2;

İkinci düstur dördbucaqlının sahə düsturundan alınır.

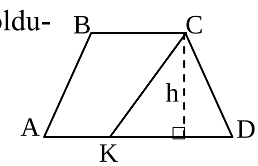
Ç a l ı ş m a n ü m u n ə l ə r i



1. Trapesiyanın tərəflərinin 4sm , 4sm , 4sm və 8sm oduğunu bilərək onun iti bucağını tapın.

Həlli. Kor bucaq təpəsindən yan tərəfə paralel parça çəkək. Yandakı üçbucaq bərabərtərəfli olduğundan iti bucaq **60^o**-dir.

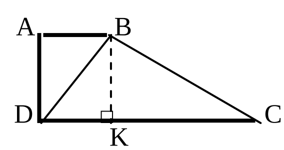
2. ABCD trapesiyasında C kor bucaq təpəsindən çəkilən CK parçası bu trapesiyanı iki bərabərsahəli fiqura ayırır. AD = 9 sm,BC = 5 sm olduğunu bilərək AK**:**KD nisbətini tapın.



Həlli. Şərtə görə $\dfrac{AK+BC}{2}\cdot h = \dfrac{KD}{2}\cdot h \Rightarrow AK+BC = KD \Rightarrow$

$\Rightarrow AK$ +5 = 9 **-** $AK \Rightarrow$ 2 AK = 4 $\Rightarrow$ AK = 2 , KD **= 7.Cavab: 2/7.**

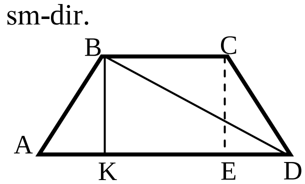
3. ABCD düzbucaqlı trapesiyasında oturacaqlara ⊥ olan yan tərəf AD = $\sqrt{3}$ sm ,kiçik oturacaq AB = 2 sm, BD ⊥ BC olduğunu bilərək böyük oturacağı tapın.



Həlli. $BD^2 = AD^2 + AB^2$ = 3 + 4 =7, BD ⊥ BC olduğundan

$BD^2 = DK \cdot DC \Rightarrow 2\cdot DC = 7$.**Cavab:** DC = 3,5 sm.

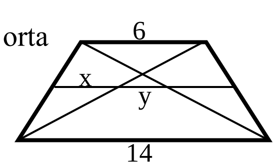
4. Bərabəryanlı trapesiyanın(AB=CD) diaqonalı 5 sm, hündürlüyü 4 sm-dir. Trapesiyanın sahəsini tapın.



Həlli. $KD^2 = BD^2 - BK^2$ = 25 - 16 = 9 $\Rightarrow$ KD = 3. BC = KE = x işarə edək.Onda AK = ED = 3 - x $\Rightarrow$ AD = AK + KD = 3 - x +3 = = 6- x.

$$S = \frac{BC+AD}{2}\cdot h = \frac{x+6-x}{2}\cdot 4 = 12.$$ **Cavab:** 12 sm^2.

5. Oturacaqları 6 sm və 14 sm olan trapesiyanın diaqonalları ilə orta xəttinin kəsişmə nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.



Həlli. Üçbucağın orta xəttinin xassəsinə görə x = 6/2 = 3, x+y = 14/2 = 7 $\Rightarrow$ y = 7 - 3 = 4. **Cavab:** y = 4 sm.

§53. Çalışmalar

1. Böyük oturacağı 8 sm olan bərabəryanlı trapesiyanın diaqonalı $4\sqrt{3}$ sm olub yan tərəfə perpendikulyardır. Trapesiyanın sahəsini tapın.

2. Trapesiyanın oturacaqları 17 sm və 9sm-dir. Trapesiyanın diaqonalları ilə orta xəttin kəsişmə nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

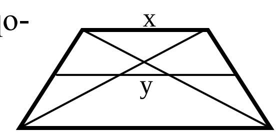
3. Trapesiyanın oturacaqları 4 sm və 6 sm,diaqonalları isə 8 sm və 6 sm-dir. Diaqonallar arasındakı bucağı tapın.

4. Bərabəryanlı trapesiyanın oturacaqları $4\sqrt{2}$ sm və $8\sqrt{2}$ sm, diaqonalları isə qarşılıqlı perpendikulyardır. Trapesiyanın yan tərəfini tapın.

5. Trapesiyanın daxilinə radiusu 5 sm olan çevrə çəkilmişdir. Trapesiyanın orta xətti onun hündürlüyünə bərabərdir. Trapesiyanın perimetrini tapın.

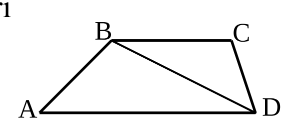
6. İti bucağı 60^o olan trapesiyanın xaricinə radiusu $5\sqrt{3}$ sm olan çevrə çəkilmişdir.Trapesiyanın diaqonalını tapın.

7. Trapesiyanın orta xətti və diaqonalları çəkilmiş və y**:**x =x**:**9**.** Kiçik oturacağı tapın.



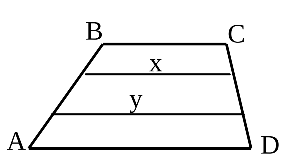
8. Bərabəryanlı trapesiyanın diaqonalı $4\sqrt{3}$ sm olub böyük oturacaqla 30^o-li bucaq əmələ gətirir. Kiçik oturacağın hündürlüyə bərabər olduğunu bilərək trapesiyanın sahəsini tapın.

9. ABCD trapesiyanın oturacaqları 4 sm və 9 sm , $\angle ABD = \angle C$. BD diaqonalını tapın.



10. Böyük oturacağı 8 sm olan bərabəryanlı trapesiyanın diaqonalı yan tərəfə perpendikulyardır. Trapesiyanın xaricinə çəkilmiş çevrənin diametrini tapın.

11. Trapesiyanın oturacaqları 7 sm və 11 sm-dir. Oturacaqlara paralel olan x və y parçaları yan tərəfləri üç bərabər hissəyə bölür. Bu parçaların cəmini tapın.

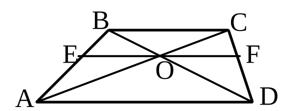


12. Trapesiyanın oturacaqları 17 sm və 9 sm, yan tərəfləri 5 sm və 7 sm-dir.Trapesiyanın sahəsini tapın.

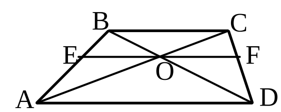
13. Trapesiyanın oturacaqları 3**:**5 nisbətindədir.Trapesiyanın diaqonalı orta xətti hansı nisbətdə bölür?

14. Oturacaqları 10 sm və16 sm olan trapesiyanın yan tərəflərini birləşdirən parça oturacaq lara paralel olub yan tərəfləri 2**:**3 nisbətdə bölür.Həmin parça neçə sm-dir? (iki hala baxın)

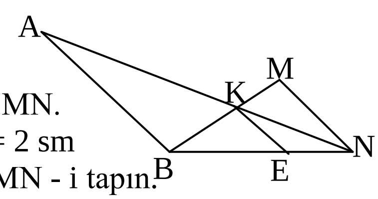
15. Trapesiyanın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindən oturacaqlara paralel EF parçası çəkilmişdir.EO **:** OF nisbətini tapın.



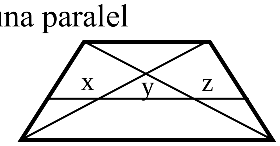
16. Trapesiyanın diaqonallarının kəsişmə nöqtəsindən oturacaqlara paralel EF parçası çəkilmişdir.BC = 4 sm , AD = 6 sm olduğunu bilərək EO parçasını tapın.



17. Şəkildə AB ‖ KE ‖ MN. AB = 5 sm , KE = 2 sm olduğunu bilərək MN - i tapın.



18. Oturacaqları 3 sm və 7 sm olan trapesiyanın oturacaqlarına paralel olan parça üç hissəyə bölünmüşdür**:** x = y - z . x**:**y**:**z nisbətini tapın.



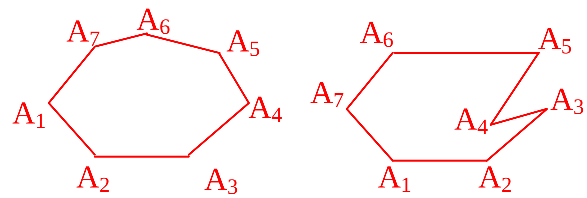
19. İsbat edin ki, trapesiyanın orta xətti oturacaqları birləşdirən ixtiyari parçanı yarıya bölür .

20.İsbat edin ki, ixtiyari trapesiyanın yan tərəfləri uzantılarnın kəsişmə nöqtəsi, turacaqların orta nöqtələri və diaqonallarının kəsişmə nöqtəsi (*dörd nöqtə*) eyni bir düz xətt üzərindədir.

§ 54. Çoxbucaqlılar

A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_{n-1} , A_n nöqtələrini nəzərdən keçirək,belə ki, ixtiyari üç ardıcıl nöqtə bir düz xətt üzərində deyil.

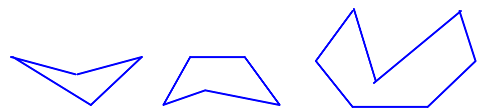
Tərif: ***Təpələri A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_{n-1} , A_n nöqtələrində olan sadə qapalı sınıq xəttin əmələ gətirdiyi müstəvi fiquruna çoxbucaqlı deyilir.***



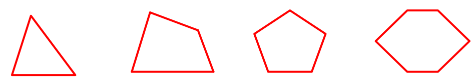
n = 7 olduqda sadə qapalı sınıq xətlər

Çoxbucaqlını əmələ gətirən sınıq xəttin təpələri bu çoxbucaqlının **təpələri**,tərəflər isə onun **tərəfləri** adlanır.

*Hər hansı bir tərəfini saxlayan düz xətlə iki hissəyə ayrılan çoxbucaqlı **çökük çoxbucaqlı** adlanır.*

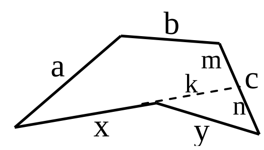


İxtiyari bir tərəfini saxlayan düz xəttdən bir tərəfdə qalan çoxbucaqlı qabarıq çoxzbucaqlı adlanır.



Qeyd**.** *Çökük n-bucaqlının çökük hissəsindəki tərəflərin cəmi qabarıq hissəsindəki tərəflərin cəmindən kiçikdir:*

$$\mathbf{x + y < a + b + c}$$

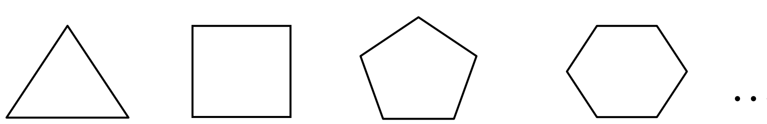


İsbatı.x tərəfinin uzantısı ilə c tərəfinin kəsişməsində alınan parçaları m və n işarə edək.Onda şəkilə əsasən
$x + y < x + k + n < a + b + m + n = a + b + c$

n-bucaqlının elementləri: n tərəfi, n bucağı , perimetri , sahəsi , diaqonalları**.**
n-bucaqlının **növləri:** düzgün n-bucaqlı, ixtiyari n-bucaqlı**.**

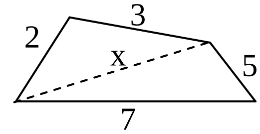
Tərif: *Qonşu olmayan təpələri birləşdirən d/x parçasına **diaqonal** deyilir.*
*Bütün tərəflərinin cəminə çoxbucaqlının **perimetri** deyilir.*
*Bütün bucaqları və bütün tərəfləri bərabər olan n-bucaqlıya **düzgün n - bucaqlı** deyilir.*

Düzgün n-bucaqlıya aid nümunələr:



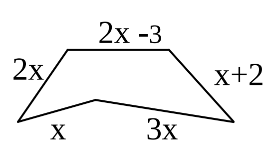
Bərabərtərəfli üçbucaq | **kvadrat** | **düzgün 5-bucaqlı** | **düzgün 6-bucaqlı** | **və s.**

Çalışma 1.Şəkildəki dördbucaqlının x diaqonalının natural ədəd olduğunu bilərək onun ən böyük qiymətini tapın.



Həlli.Üçbucaq bərabərsizliyinə görə
$7-5 < x < 2+3 \Rightarrow 2 < x < 5 \Rightarrow x_{max} = 4.$

Çalışma 2.Şəkildəki beşbucaqlının perimetrinin 53 sm olduğunu bilərək ən böyük tərəfi tapın.

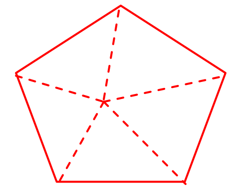


Həlli. $P = x + 2x + 2x-3 + x+2 + 3x = 53 \Rightarrow 9x - 1 = 53 \Rightarrow x = 6.$
Cavab:18 sm

Gələcək şərhimizdə yalnız qabarıq çoxbucaqlıları nəzərdən keçirəcəyik!

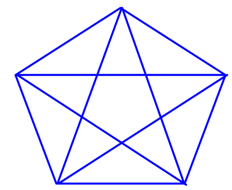
§ 55. Çoxbucaqlıların xassələri

1.*İstənilən n-bucaqlının daxili bucaqlarının cəmi* $\alpha_n = 180^o(n\text{-}2)$ **.**

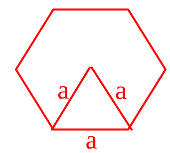


İsbatı: n-bucaqlının daxilində ixtiyari bir nöqtə götürüb onu təpələrlə birləşdirək.Alınan n sayda üçbucağın daxilibucaqlarının cəmi **$180^o \cdot n$** olacaqdır.Şəkildən aydındır ki, $180^o \cdot n = \alpha_n + 360^o$, $\boldsymbol{\alpha_n = 180^o\ (n\text{-}2)}$.

2.n-bucaqlının hər təpəsindən çıxan diaqonallarının sayı n - 3 ,bütün diaqonallarının sayı isə n(n-3):2 düsturu ilə hesablanır.



İsbatı. *n-bucaqlının hər təpəsindən çıxan diaqonalların sayı* ***n -3*** *olduğu üçün n(n - 3) hasili bütün diaqonalların iki mislidir,çünki n-bucaqlının bütün diaqonallarını saydıqda hər dioqonal iki dəfə sayılmış olur.*



3.*Düzgün n-bucaqlının hər bir daxili bucağı* $\boldsymbol{\alpha = 180^o(n\text{-}2):n}$**.**

Düzgün 6-bucaqlının xari-cinə çəkilmiş çevrənin radi-usu onun tərəfinəbərabərdir.

4. *Hər təpədə bir xarici bucaq götürməklə istənilən n-bucaqlının xarici bucaqlarının cəmi* $\boldsymbol{\beta_n = 360^o}$ **.**

İsbatı. Hər təpədə bir cüt qonşu bucaq olduğu üçün

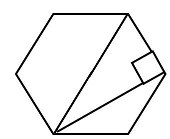
$$\beta_n = 180^o \cdot n - 180^o\,(n\text{-}2) = 360^o .$$

5. *n-bucaqlının perimetri(P)* ***daxilə*** *çəkilmiş çevrənin uzunluğundan böyük,* ***xaricə*** *çəkilmiş çevrənin uzunluğundan kiçikdir:*

$$2\pi r < P < 2\pi R$$

6.*Daxilinə çevrə çəkilə bilən (məsələn,düzgün n-bucaqlı) n-bucaqlının* ***sahəsi*** $\boldsymbol{S = pr}$ *,burada* $p = P/2$.

Bu xassənin isbatı üçbucaqdakı kimi aparılır.

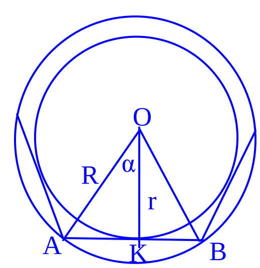


7. Düzgün 6-bucaqlının bir təpəsindən çıxan iki diaqonal və tərəf ***düzbucaqlı üçbucaq*** *əmələ gətirir.*

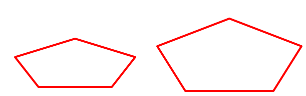
8. İstənilən düzgün n-bucaqlının daxilinə və xaricinə çevrə çəkmək olar,belə ki, bu çevrələrin mərkəzləri üst-üstə düşür.Tərəf və radiuslar üçün aşağıdakılar doğrudur:

$$r^2 + (a/2)^2 = R^2 ,\ \sin\alpha = a/(2R) ,\ \ \alpha = 180^o/n\ ;$$

burada a = AB - n-bucaqlının tərəfi,R =AO xaricə çəkilmiş, r = OK – daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur.



9.Oxşar çoxbucaqlıların perimetrlər nisbəti uyğun tərəflər nisbətinə, sahələr nisbəti isə uyğun tərəflər nisbətinin kvadratına bərabərdir.

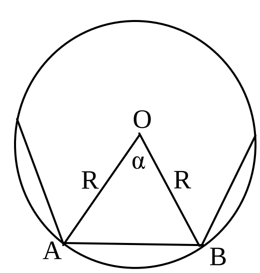


Qeyd: *Bir çoxbucaqlının butun daxili bucaqları diğər çoxbucaqlının butun daxili bucaqlarına bərabər olub,uyğun tərəflər nisbəti eyni olan çoxbucaqlılar* ***oxşar çoxbucaqlılar*** *adlanır.*

Çalışma. Düzgün 12-bucaqlının sahəsi 192 sm^2-dir.Xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

Həlli. $\alpha = 360^o : 12 = 30^o \Rightarrow S_{AOB} = \frac{1}{2}R^2 \sin 30° = \frac{R^2}{4}$

Digər tərəfdən $S = 12 \cdot S_{AOB} = 192 \Rightarrow 3R^2 = 192 \Rightarrow$ **R = 8 sm.**



§56. Çalışmalar

1. 12-bucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.

2. Daxili bucaqlarının cəmi 3600^o olan çoxbucaqlının tərəflərinin sayını tapın.

3. Çoxbucaqlının hər təpəsindən 12 diaqonal çıxır. Onun daxili bucaqlarının cəmi neçə dərəcədir?

4. Daxili bucaqlarının cəmi 2700^o olan çoxbucaqlının diaqonallarının sayını tapın.

5. Çoxbucaqlının diaqonallarının sayı 54-dür. Onun tərəflərinin sayını tapın.

6.Hansı düsturlar düzgün n-bucaqlıya aiddir:

1) $4r^2 + a^2 = 4R^2$; 2) $r^2 + a^2 = R^2$;

3) $a = 2R \sin\dfrac{360^0}{n}$; 4) $a = 2R \sin\dfrac{180^0}{n}$?

burada a - *tərəf*, r,R - daxilə və xaricə çəkilmiş çevrələrin radiuslarıdır.

7. Düzgün çoxbucaqlının diaqonallarının sayı 90-dır.Onun daxili bucağı neçə dərəcədir?

8. Düzgün çoxbucaqlının hər təpəsindən çıxan diaqonallarının sayı 22-dir. Onun daxili bucağı neçə dərəcədir?

9. Düzgün altıbucaqlının sahəsi $54\sqrt{3}$ sm^2-dır. Onun böyük diaqonalı neçə sm-dir?

10. Düzgün altıbucaqlının daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusları nisbətini tapın.

11. Düzgün çoxbucaqlının daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusları nisbəti 1**:**2 kimidir. Çoxbucaqlının daxili bucağı neçə dərəcədir?

12. Düzgün onbucaqlının perimetri 120 sm-dir. Onun daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.

13. Düzgün 12-bucaqlının xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu $6\sqrt{2}$ sm-dir.Onun sahəsini tapın.

14. Düzgün 12-bucaqlının daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu $2\sqrt{2}$ sm-dir.Onun sahəsini tapın.

15. 18-bucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.

16. Daxili bucaqlarının cəmi 5400^o olan çoxbucaqlının tərəflərinin sayını tapın.

17. Çoxbucaqlının hər təpəsindən 18 diaqonal çıxır.Onun daxili bucaqlarının cəmi neçə dərəcədir?

18. Daxili bucaqlarının cəmi 1800^o olan çoxbucaqlının diaqonallarının sayını tapın.

19. Çoxbucaqlının diaqonallarının sayı 65-dür. Onun tərəflərinin sayını tapın.

20. Hansı düsturlar düzgün n-bucaqlıya aiddir?

1) $a^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\alpha$; 2) $S = 0{,}5nR^2\sin\alpha$;

3) $P = 2Rn\sin\alpha$; 4) $P = 2Rn\sin\alpha$?

burada a - *tərəf*, $\alpha = \dfrac{360^0}{n}$; r,R - daxilə və xaricə çəkilmiş çevrələrin radiuslarıdır.

21. Düzgün çoxbucaqlının diaqonallarının sayı 77-dır.Onun daxili bucağı neçə dərəcədir?

22. Düzgün çoxbucaqlının hər təpəsindən çıxan diaqonallarının sayı 25-dir. Onun daxili bucağı neçə dərəcədir?

23. Düzgün altıbucaqlının sahəsi $36\sqrt{3}$ sm^2-dır. Onun böyük diaqonalı neçə sm-dir?

24. Düzgün altıbucaqlının perimetri 48 sm-dir. Onun sahəsini tapın.

25. Düzgün altıbucaqlının kiçik diaqonalı 3 sm, böyük diaqonalı 5 sm-dir.Onun perimetrini tapın

26. Düzgün 12-bucaqlının perimetri 96 sm-dir. Onun ən böyük diaqonalı neçə sm-dir?

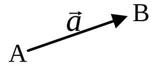
27. Düzgün 12-bucaqlının xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu $2\sqrt{3}$ sm-dir.Onun ən kiçik diaqonalı neçə sm-dir?

28. Düzgün 8-bucaqlının daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu $3\sqrt{2}$ sm-dir.Onun xaricinə çəkilmiş çevrənin uzunluğunu tapın.

§57. Vektorlar

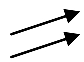
Koordinatlarsız vektorlar

Tərif: İstiqamətlənmiş parçaya **vektor** deyilir($\vec{AB}=\vec{a}$)

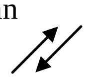


Elementləri:başlanğıcı(A),sonu(B), uzunluğu(modulu və ya mütləq qiyməti, $|\vec{a}|$).

Uzunluqları **bərabər**, istiqamətləri **eyni** olan vektorlara **bərabər vektorlar** deyilir.



Uzunluqları **bərabər**, istiqamətləri **əks** olan vektorlara **əks vektorlar** deyilir.

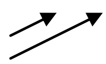


Paralel d/x-lər üzərində olan vektorlara **kollinear vektorlar** deyilir.

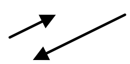
Kollinear vektorlar eyni və ya əks istiqamətli olurlar.

Vektorun ədədə vurulması

Vektoru($\vec{a}$) müsbət ədədə(λ>0) vurmaq üçün onun uzunluğunu bu ədədə vurub **istiqamətini saxlamaq** lazımdır($\lambda\vec{a}$).

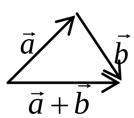


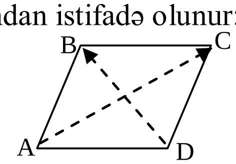
Vektoru mənfı ədədə vurmaq üçün onun uzunluğunu bu ədədin moduluna vurub istiqamətini **əksinə dəyişmək** lazımdır.



Aydındır ki, $\vec{a}$ və $\lambda\vec{a}$ vektorları kollineardır.

İki vektoru *toplamaq(çıxmaq)* üçün üçbucaq və ya paraleloqram qaydasından istifadə olunur:





$\vec{AB}+\vec{AD} = \vec{AC}$; $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$

İki vektorun skalyar hasili:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$, $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

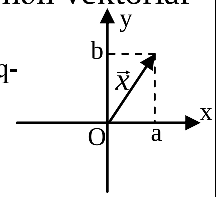
$\vec{a}\cdot(\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} \pm \vec{a}\cdot\vec{c}$

*Vektorların **perpendikulyarlıq** şərti:*

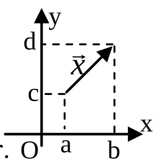
$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x}\cdot\vec{y}$ = ac +bd =0 .

Koordinatlarla verilən vektorlar

$\vec{x}$ vektorunun başlanğıcı koordinat başlanğıcında olduqda onun son nöqtəsinin koordinatları bu vektorun koordinatları adlanır və $\vec{x}$ **(**a;b**)** (və ya $\vec{x}$ = (a;b))kimi işarə olunur.



Vektorun başlanğıcı koordinat başlanğıcında olmadıqda $\vec{x}$ = (b-a;d-c).



Uğun koordinatları eyni olan vektorlar *bərabərvektorlar* adlanır.
Koordinatları əks ədədlər olan vektorlar *əks vektorlar* adlanır**:**

$\vec{x}$ **(**a;b**)** və $\vec{y}$ (-a;-b)

Vektoru *ədədə vurmaq* üçün onun koordinatlarını bu *ədədə vurmaq* lazımdır:

$\lambda\vec{x}$ = **(**λa;λb**)**

$\vec{b}=\lambda\vec{a}$ şərtini ödəyən $\vec{a}\,(a_1,a_2)$ və $\vec{b}\,(b_1,b_2)$ vektorlarına **kollinear vektorlar(**paralel**)** deyilir.Koordinatlarla yazılış**:**

$b_1=\lambda a_1, b_2=\lambda a_2$.

Vektorları ***toplamaq*** üçün onların uyğun koordinatlarını ***toplamaq*** , vektorları ***çıxmaq*** üçün onların uyğun koordinatlarını ***çıxmaq*** lazımdır.Məs. $\vec{x}$ **(**a;b**)** və $\vec{y}$ **(**c;d**)** vektorları üçün $\vec{x} \pm \vec{y}$ = (a ± b; c ± d) .

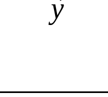
İki vektorun skalyar hasili:

$\vec{x}\cdot\vec{y}$ **= ac +bd ;** $\vec{x}\cdot\vec{x}$ **= a² + b²**

Vektorun uzunluğu: $|\vec{x}| = \sqrt{a^2+b^2}$.

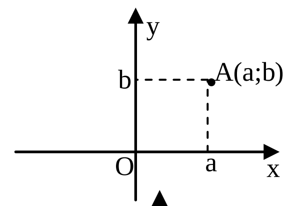
$\vec{x}$ (a;b) və $\vec{y}$ (c;d) vektorlarının **kollineardıq(**paralellik**)** *şərti:* $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

İki vektor arasındakı bucaq düsuru: $\cos\alpha = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|} = \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}}$;

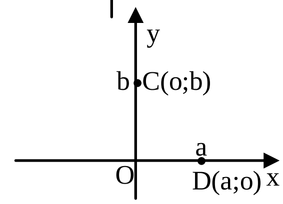


Qeyd: U*zunluğu **vahidə** bərabər olan vektora **vahid vektor** deyilir***.** *Koordinat oxlarının vahid vektorlarını* $\vec{u}(1;0)$ və $\vec{v}(0;1)$ *ilə işarə etsək,onda* $\vec{x}(a;b)=a\vec{u}+b\vec{v}$ **.**

Tərif və anlayışlar



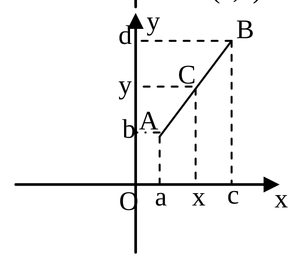
Düzbucaqlı koordinat sistemində A nöqtəsinin absis oxu(**ox**) üzərindəki **proyeksiyasına**(a) bu nöqtənin **absisi(a)**,ordinat oxu (**oy**) üzərindəki **proyeksiyasına**(b) bu nöqtənin **ordinatı(b)** deyilir və A(a;b) kimi işarə olunur (O(o;o) *koordinat başlanğıcıdır*).



Aydındır ki**, absisi sıfır** olan ixtiyari nöqtə(C) **ordinat oxu** üzərində(*b ədədinə uyğun yerdə*), **ordinatı sıfır** olan ixtiyari nöqtə nöqtə(D) isə **absis** oxu üzərindədir(*a dədədinə uyğun yerdə*).

Ucları A(a;b) və B(c;d) olan ***parçasının uzunluğu*** $\vec{AB}$ (c-a;d-b) vektorunun uzunluğuna bərabər olduğundan

$$AB = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}\,.$$



Bu düstur həm də ***iki nöqtə arasındakı məsafə*** düsturu adlanır.

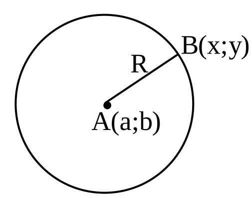
AB parçasının **orta nöqtəsini** C(x;y) ilə işarə etsək,onda

$$x = \frac{a+c}{2}\ ,\ y = \frac{b+d}{2}$$

İsbatı. $\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ bərabərliyini koordinatlarla yazsaq

$$x-a = \frac{1}{2}(c-a)\ ,\ y-b = \frac{1}{2}(d-b) \rightarrow\ x = \frac{a+c}{2}\ ,\ y = \frac{b+d}{2}$$

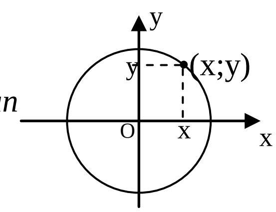
Çevrənin tənliyi



Çevrə **mərkəz** adlanan nöqtədən **bərabər məsafədə** olan (x;y) nöqtələr çoxluğu olduğu üçün

$$R = AB = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \rightarrow \mathbf{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}.$$

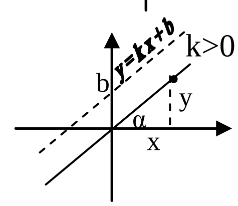
Sonuncu bərabərlik ***mərkəzi (a;b) nöqtəsində , radiusu R olan çevrənin tənliyidir.***



Xüsusi halda(a=o,b=o), mərkəzi koordinat başlanğıcında,radiusu R olan çevrənin tənliyi $\mathbf{x^2 + y^2 = R^2}$ *şəklindədir.*

Düz xəttin tənliyi

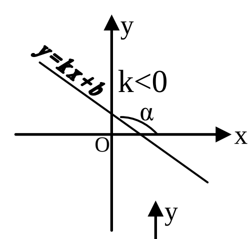
Düzbucaqlı koordinat sistemində *ordinatının absisinə nisbəti* sabit olan nöqtələr çoxluğunu nəzərdən keçirək.Bu çoxluqdakı nöqtələr **düz xətt** əmələ gətirir,çünki



$$\frac{y}{x} = tg\alpha = const \rightarrow \boldsymbol{\alpha = const}\,.$$

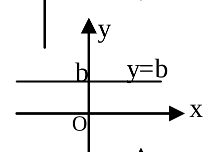
Sabit ədədi ***k*** *(tgα = k) ilə işarə etsək,* ***y = kx*** *tənliyini alırıq****.***

Sonuncu tənlik koordinat başlanğıcından keçən ***d/x-in tənliyi*** adlanır.

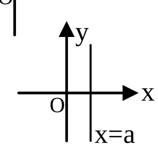


y =kx d/x-nə paralel olub oy oxunu *b* ədədinə uyğun nöqtədə kəsən düz xəttin tənliyi ***y = kx +b*** şəklindədir.

k əmsalı düz xəttin ***bucaq əmsalı*** adlanır. α bucağı *iti* olduqda tg*α*>0 , α *kor* bucağı olduqda isə tg*α*<0.Ona görə də düzbucaqlı koordinat sistemində ***y = kx +b düz xətləri*** k>0 və k<0 olduqda **,** yandakı şəkillərdə təsvir edilmişdir.



k = 0 olduqda , **y = b** düz xəttini alırıq ki,bu d/x absis oxuna paralel olub ordinat oxunu (0;b) nöqtəsində kəsir.

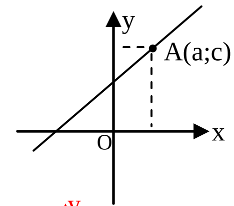


Qeyd: y = o absis *oxunun,* ***x = o ordinat*** *oxunun tənliyidir.* ***x = a*** *d/x-i ordinat oxuna paralel olub absis oxunu x = a nöqtəsində kəsir.*

§ 59. Nöqtələrin d/x üzərində olması şərtləri. İki düz xətt arasındakı bucaq

Bir nöqtənin d/x üzərində olması şərti

y = kx +b d/x-nin ***A(a;c)*** nöqtəsindən **keçməsi** (və yaxud ***A(a;c)*** nöqtəsinin bu **d/x üzərində** olması) o deməkdir ki, bu nöqtənin koordinatları y = kx +b tənliyini ödəyir, başqa sözlə ***c = ka +b.***
Bu bərabərlik nöqtənin d/x üzərində olması **şərtidir.**



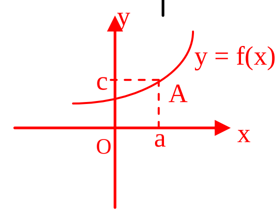
İki nöqtənin d/x üzərində olması şərti

Əgər ***y = kx +b*** d/x-i ***A(a;c)*** **və** ***B(m;n)*** nöqtələrindən keçirsə, onda bu **nöqtələrin koordinatları** aşağıdakı **sistemi** ödəyir:

c = ka +b, n = km +b.

Bu sistem isə iki nöqtənin bir d/x üzərində olması ***şərtidir.***

Qeyd. A(a;c) nöqtəsinin *y = f(x)* funksiyasının qrafiki üzərində olması şərti belədir**:** ***c = f(a)***



Nümunələr: 1. y = 5x – 3 düz xətti verilmişdir. m-in hansı qiymətində A(3;m) nöqtəsi bu d/x üzərində yerləşər?

Həlli.Nöqtənin d/x üzərində olması şərtinə görə m = 5⋅3 - 3 = 12.

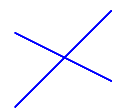
2. A(1;2) və B(-2;3) nöqtələrindən keçən d/x-in tənliyini yazın**.**

Həlli.İki nöqtənin düz xətt *(y = kx + b) üzərində olması şərtinə görə*

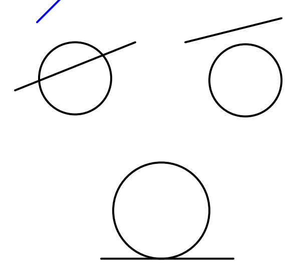
$$2 = k \cdot 1 + b,\quad 3 = -k \cdot 2 + b.$$

Buradan alırıq ki, $3b = 7 \rightarrow b = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3},\ k = -\frac{1}{3}$ ***.Cavab****:* $y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$.

Qeyd 1. k≠a olduqda y = kx + b və y = ax +c d/x-ləri kəsişirlər. Kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün y = kx + b , y = ax +c tənliklər sistemini həll etmək lazımdır.



Qeyd 2. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ çevrəsi ilə y = kx + b düz xəttinin qarşılıqlı vəziyyətini (**kəsişir,kəsişmir,toxunur**) müəyyən etmək üçün $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, y = kx + b tənliklər sistemini həll etmək lazımdır.Bu sistemini həlli **kvadrat tənliyə** gətirilir.
Bu kvadrat tənliyin diskrimnantı **D>0** olduqda çevrə və d/x kəsişir, **D<0** olduqda kəsişmir, **D = 0** olduqda isə d/x çevrəyə toxunur.



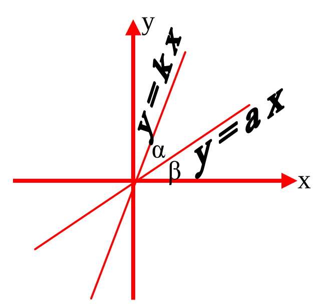
İki düz xətt arasındakı bucaq

y= kx +b və y = ax +c düz xətləri arasındakı bucaq

$$\text{tg}\alpha = \left|\frac{k-a}{1+ka}\right|. \qquad (*)$$

düsturu ilə hesablanır.

y= kx +b və y = ax +c düz xətləri paralel olduqda α = 0º ⇒
⇒ tgα = 0⇒ k - a = 0 ⇒ **k = a.**



Sonuncu bərabərlik iki d/x-in paralellik şərtidir

(*) düsturunda α = 90º olduqda **sol tərəf** (tgα) təyin edilmədiyi üçün sağ tərəf də təyin edilməmişdir, yəni **1 +** ***ak*** **= 0**.
Buradan iki düz xəttin perpendikulyarlıq şərtini alırıq**:**

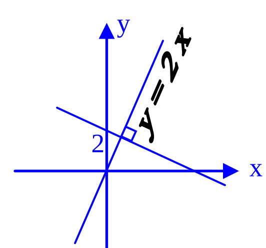
***ak* = -1.**

Başqa sözlə**:**

İki düz xətt perpendikulyardırsa, onda onların bucaq əmisallarının hasili (- 1)-dir.

Tərs mülahizə də doğrudur**:**

Bucaq əmicallarının hasili (-1) olan iki düz xətt perpendikulyardır.



Çalışma . y = 2x düz xəttinə ⊥ olub, (0;2) nöqtəsindən keçən d/x-in tənliyini yazın.
Həlli. Perpendikulyarlıq şərtinə görə axtarılan d/x-in bucaq əmisalı (-0,5)-dir.
Ona görə də, axtarılan d/x-in tənliyi y = - 0,5x + 2 şəklindədir.

§ 60. Çalışmalar

1. $\bar{a}$ **(**-1;2**)** və $\bar{b}$ (2;4) vektorları verilib. $2\bar{a}+3\bar{b}$ vektorunun uzunluğunu tapın.

2. $\bar{a}$ **(**1;-2**)** və $\bar{b}$ (3;5) vektorları verilib. $3\bar{a}-5\bar{b}$ vektoru ilə $\bar{a}-\bar{b}$ vektorunun skalyar hasilini tapın.

3. $\bar{a}$ (3;4**)** və $\bar{b}$ (2;1) vektorları arasındakı bucağın cos-nu tapın.

4.Başlanğıcı koordinat başlanğıcında olan $\bar{a}$ (0;-2**)** və $\bar{b}$ (3;0) vektorlarının son nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

5. $\bar{a}$ (n;-2**)** və $\bar{b}$ (-8;n) vektorlarının kollinear olduğunu bilərək n-i tapın.

6. $\bar{a}$ (n;9**)** və $\bar{b}$ (-8; 4) vektorlarının perpendikulyar olduğunu bilərək n-i tapın.

7. m-in hansı qiymətində $\bar{a}$ (m;1**)** və $\bar{b}$ (m;m) vektorlarının cəmi vahid vektor olar?

8. m-in hansı qiymətində $\bar{a}$ (2m;1+m**)** vektorunun uzunluğu 2-dir?

9. $\bar{a}$ **(**7;-2**)** və $\bar{b}$ (-2;8) vektorları verilib. $2\bar{a}-3\bar{b}$ vektorunun uzunluğunu tapın.

10. $\bar{a}$ **(**5;-6**)** və $\bar{b}$ (3;5) vektorları verilib. $\bar{a}+2\bar{b}$ vektoru ilə $\bar{a}-\bar{b}$ vektorunun skalyar hasilini tapın.

11. $\bar{a}$ (1;1**)** və $\bar{b}$ (-1;-1) vektorları arasındakı bucağı tapın.

12. Başlanğıcı (1;2) nöqtəsində olan $\bar{a}$ (7;-2**)** və $\bar{b}$ (8;-3) vektorlarının son nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

13. $\bar{a}$ (m;5**)** və $\bar{b}$ (8;n) vektorlarının kollinear olduğunu bilərək mn hasilini tapın.

14. $\bar{a}$ (n;6**)** və $\bar{b}$ (-4; 6) vektorlarının perpendikulyar olduğunu bilərək n-i tapın.

15. m-in hansı qiymətində $\bar{a}$ (m;2m) və $\bar{b}$ (2m;m) vektorlarının cəmi vahid vektor olar?

16. m-in hansı qiymətində $\bar{a}$ (3m;3-m**)** vektorunun uzunluğu $\sqrt{13}$ -ə bərabər olar?

17. $\bar{a}$ (-3;3**)** və $\bar{b}$ (2;2) vektorları arasındakı bucağı tapın.

18. $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının arasındakı bucağın 120^o, $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$ olduğunu bilərək bu vektorların skalyar hasilini hesablayın.

19. $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 3$, $\bar{a} \cdot \bar{b}$ **=**24 olduğunu bilərək $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının arasındakı bucağı tapın.

20. Hansı vektor $\bar{a}$ (-12;18) vektoruna kollineardır?
1) (2;3) 2)(-2;3) 3) (-4;-6) 4) (4;6) 5) (4;-6)

21. Hansı vektor $\bar{a}$ (1,2;1,8) vektoruna perpendikulyardır?
1) (1;1) 2) (-2;6) 3) (-5;1) 4) (3;2) 5) (3;-2)

22. Ox , Oy oxları və y = 2x + 3 düz xətti ilə məhdud edilmiş üçbucağın sahəsini tapın.

23. k-nın hansı qiymətində A(3;k) nöqtəsi y = $\frac{3x-2}{5x+1}$ funksiyasınınqrafiki üzərindədir?

24. M(1;4) nöqtəsindən keçən və mərkəzi $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 20$ çevrəsinin mərkəzi ilə eyni olan çevrənin radiusunu tapın.

25. A(2;5) nöqtəsindən keçən və y = x -1 d/x-nə paralel olan düz xəttin tənliyini yazın.

26. Koordinat başlanğıcından y = -2x + 1 düz xəttinə qədər məsafəni tapın.

27. Hansı düz xətt y = -2x + 1 düz xəttinə perpendikulyardır?
1) y = 2x + 1 **2)** y = -2x + 3 **3)** y = -0,2x + 4 **4)** y = -0,5x + 1 **5)** y = 0,5x + 0,5

28. Hansı düz xətt y = 2x - 1 düz xəttinə paraleldir ?
1) y = 2x + 3 **2)** y = -2x + 5 **3)** y = -0,5x + 4 **4)** y = -0,5x + 2 **5)** y = 0,5x + 5

29. y = 2x + 8 və y = 2x + 6 düz xətləri arasındakı məsafəni tapın.

30. y = 2x + 8 və y = x + k düz xətlərinin absis oxu üzərində kəsişdiyini bilərək k parametrini tapın.

31. y = -6x + 3 və y = 3x + k düz xətlərinin ordinat oxu üzərində kəsişdiyini bilərək k parametrini tapın.

32. y = 5x + a və y = 3x + b düz xətlərinin (2;3) nöqtəsində kəsişdiyini bilərək a və b parametrlərini tapın.

33. y = 0,5x düz xəttinə perpendikulyar olan düz xəttin (-1;2) nöqtəsindən keçdiyini bilərək bu düz xəttin tənliyini yazın.

34.Mərkəzi (-2;1) nöqtəsində , radiusu 3 sm olan çevrənin tənliyini yazın.

35. $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$ tənliyi ilə verilən çevrə y = x düz xəttindən hansı məsafədədir.

36. y = -2x + 3 və y = kx + 2 düz xətləri arasındakı bucağın 45^o olduğunu bilərək k əmsalını tapın.

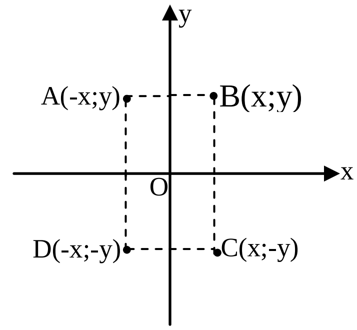
37. y = $\sqrt{3}$ x - 3 düz xətinin ordinat oxu ilə əmələ gətirdiyi kiçik bucağı tapın.

38. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$ çevrəsi ilə məhdud edilmiş dairənin sahəsini tapın.

39. $4x^2 + 9y^2 + 4x - 6y = 14$ tənliyi ilə verilən çevrənin uzunluğunu tapın.

40.$(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$ çevrəsinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

§61. Nöqtə və düz xəttə(oxa) nəzərən simmetriya



Tərif: ***ox boyunca qatladıqda iki nöqtə üst-üstə düşərsə , belə iki nöqtəyə oxa (d/x-ə) nəzərən simmetrik nöqtələr deyilir.***

Şəkildəki nöqtələrdən A və B , C və D **ordinat oxuna**, B və C, A və D nöqtələri **absis oxuna** , B və D nöqtələri isə **koordinat başlanğıcına** nəzərən simmetrikdir (BO = OD).

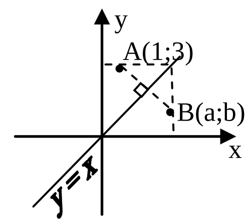
Tərif: ***K MN parçasının orta nöqtəsidirsə,onda deyirlər ki, M və N nöqtələri K nöqtəsinə nəzərən simmetrikdir.***

Aydındır ki, absis oxuna nəzərən simmetrik köçürmə zamanı nöqtənin absisi dəyişmir, ordinatın işarəsi isə əksinə dəyişir;

Ordinat oxuna nəzərən simmetrik köçürmə zamanı nöqtənin ordinatı olduğu kimi qalır, absisi isə əksinə dəyişir;

Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetriyada nöqtənin hər iki koordinatı əksinə dəyişir

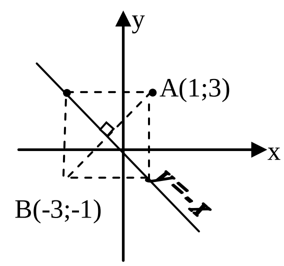
Oxa nəzərən simmetrik köçürməyə aid çalışma nümunələri.



Çalışma 1. A(1;3) və B(a;b) nöqtələrinin **y = x** d/x-nə nəzərən simmetrik olduğunu bilərək , a və b ədədlərini tapın.

Həlli. Şəkilə diqqətlə nəzər yetirsək a = 3 , b = 1 alırıq.

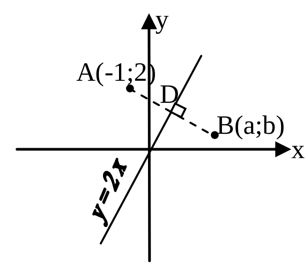
Ümumiyyətlə, **A(a;b)** *nöqtəsinin* y = x *d/x-nə nəzərən simmetrik nöqtəsi* **B(b;a)** *şəklindədir.*



Çalışma 2. **y = -x** d/x-nə nəzərən A(1;3) nöqtəsinə simmetrik olan nöqtəni tapın.

Həlli. Şəkildəki kvadrata əsasən axtarılan nöqtə B(-3;-1) - dir.

Ümumiyyətlə, **y = -x** d/x-nə nəzərən A(a;b) nöqtəsinə simmetrik olan nöqtə B(-b;-a) şəklindədir.



Çalışma 3. **y = 2x** d/x-nə nəzərən A(-1;2) nöqtəsinə simmetrik olan nöqtəni tapın.

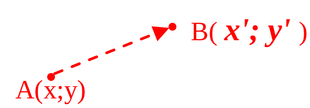
Həllı: Əvvəlcə, A(-1;2) nöqtəsindən keçən və **y = 2x** d/x-nə $\perp$ olan düz xəttin tənliyini yazaq.Axtarılan d/x y = - 0,5x + c şəklindədir.Bu d/x A(-1;2) nöqtəsindən keçdiyi üçün 2 = - 0,5(-1) + c $\Rightarrow$ c = 1,5.

y = - 0,5x + 1,5 d/x-i B(a;b) nöqtəsindən keçdiyi üçün b = -0,5a + 1,5.

D nöqtəsi AB parçasının orta nöqtəsi olduğu üçün, bu nöqtənin koordinatları $(\frac{a-1}{2};\frac{b+2}{2})$ şəklindədir.D nöqtəsi **y = 2x** d/x üzərində olduğundan $\frac{b+2}{2}$ = a - 1 $\Rightarrow$ b = 2a - 4 = -0,5a + 1,5 $\Rightarrow$ 2,5a = 5,5 $\Rightarrow$

a = 2,2 ; b = -1,1 + 1,5 = 0,4 . Cavab: B(2,2;0,4)

Paralel köçürmə



Tərif: ***x' = x + a , y' = y+b düsturları ilə təyin olunan çevirməyə paralel köçürmə deyilir.***

Paralel köçürmə zamanı A(x;y) nöqtəsi B(x';y') nöqtəsinə köçür (burada *a* və *b* verilən ədədlərdir).

Çalışma 1. x' = x + 2, y' = y - 1 düsturları ilə verilmiş paralel köçürmədə A(-1;3) nöqtəsi hansı nöqtəyə köçür?

Həlli: x' = -1 + 2, y' = 3 - 1 $\Rightarrow$ x' = 1, y' = 2. **Cavab:** B(1;2)

Çalışma 2. x' = x -3, y' = y + 1 düsturları ilə verilmiş paralel köçürmədə hansı nöqtə B(-1;3) nöqtəsinə köçür?

Həlli: -1= x -3, 3 = y+ 1 $\Rightarrow$ x = 2 , y = 2. **Cavab:** A(2;2)

Çalışma 3. Paralel köçürmədə A(4;5) nöqtəsi B(-1;2) nöqtəsinə köçür. Bu paralel köçürmədə C(-6;2) hansı nöqtəyə köçür?

Həlli: Şərtə görə -1 = 4 + a , 2 = 5 + b $\Rightarrow$ a = -5 , b = -3.Deməli, nəzərdə tutulan paralel köçürmə x' = x -5, y' = y -3 şəklindədir.

Onda x' = -6 -5, y' = 2 -3 $\Rightarrow$ x' = -11, y' = -1.**Cavab:** C nöqtəsi D(-11;-1) nöqtəsinə köçür.

Müəllifin əsas pedaqoji fəaliyyəti haqqında qısa məlumat:

1.BDU-nun mexanika-riyaziyyat fakültəsinin məzunu (1972-ci il,diplom);

2.Xankəndi şəhərində orta və ali məktəbdə riyaziyyat müəllimi (1972-1979);

3.Fizika ,riyaziyyat və informatika təmayüllü liseydə 18 il riyaziyyat müəllimi(1980 -1998);

4. 70 saylı pilot məktəbində yeni təlim texnologiyaları üzrə direktor müavini (1998-2002);

5.Nizami rayon təhsil şöbəsində yeni təlim texnologiyaları üzrə metodist (2003 - 2004);

6.Humanitar liseydə (BSU) "İntellekt" kursunun müəllimi və rəhbəri (2002-2006);

7. Parapsixologiya kursunun məzunu (1996, diplom) ;

8. Dərsliklərin qiymətləndirilməsi üzrə beynəlxalq ekspert Tim Hantın seminarlarının iştirakçısı (1999-2001, sertifikat);

9.Kanadalı psixoloq Larri Nisanın seminarlarının iştirakçısı (2003 , sertifikat);

10. "Tərəqqi" təlim modeli layihəsinin (2002) və bu model üzrə yazılmış "Riyaziyyat və intellekt" vəsaitinin müəllifi (2006).

"Riyaziyyat və intellekt" vəsaitləri

Vəsaitlər ayrı-ayrı A , B , C variantları şəklində 2006-cı ildə riyazi,məntiqi və psixoloji testlər toplusu şəklində çap edilmişdir.Bu vəsaitə şagirdlərin dialoq və diskussiya mədəniyyətini formalaşdıran intellekt meyarları və əlamətləri, atalar sözləri və müdrik kəlamlar da daxil edilmişdir.

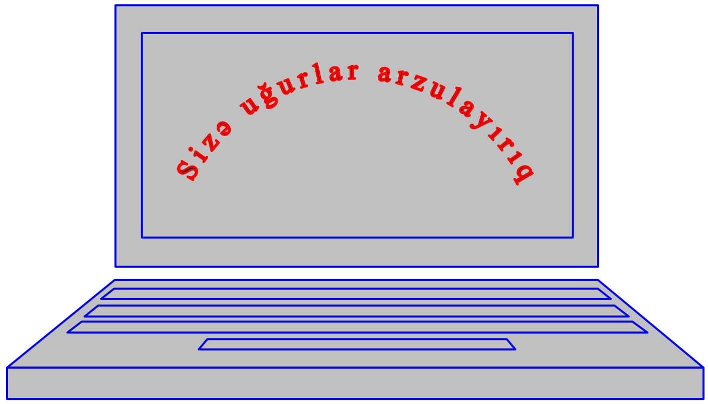
"Riyaziyyat və intellekt" vəsaitləri şagirdləri fəal təlim prosesinə cəlb etmək məqsədi ilə **motevasiya mərhələsi** (cəlbetmə və "əqli gimnastika") kimi hazırlanmışdır.

Bu vəsaitlərin hər variantı 7 - 10 günlük şagird iş dəftəri səviyyəsində tərtib edilmışdır. "Riyaziyyat və intellekt" vəsaitləri üzrə iş üç istiqamətdə aparıla bilər**:**

a) *Lisey tədrisi prosesində yay tətilindən qayıdan 5-ci sinif şagirdləri dərslik üzrə təlim fəaliyyətinə başlamazdan əvvəl iki həftə müddətində A və B variantlarını , dərs ili boyunca isə şagirdlər hər tətildən qayıdarkən C variantını hissə-hissə işləyirlər.*

b) *Fərdi hazırlıq kurslarında (məşğələlərində) yeni başlayanlar ümumi proqram üzrə işə başlamazdan əvvəl bir ay müddətində A,B,C variantlarını işləyirlər.*

c) *Yaradıcı müəllimlər öz bildikləri kimi hər bir sinifdə istifadə edə bilərlər.*



İsmayılov İxtiyar Məhəmməd oğlu

Bədii redaktor : ***Nurlana Babayeva***
Dizayner : ***Cəsarət Qasımov***
Korrektor : ***Rövşanə Qəmbərova***